А. Л. Алифанов
Л. А. Алифанов

МАРКЕТИНГ:

РЕШЕНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования для межвузовского использования в качестве учебного пособия для студентов экономических специальностей всех форм обучения

Красноярск 2005

УДК 681.3:33(07)
А 50

Рецензенты:
Л. Ф. Магеря, канд. эконом. наук, доц. кафедры «Экономика и управление предприятием» ;
С. С. Матович, гл. инженер Горно-транспортного предприятия ЗФ ОАО «ГМК «НН»

Алифанов, А. Л.
А 50 Маркетинг: Решение исследовательских задач: Учеб. пособие / А. Л. Алифанов, Л. А. Алифанов. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2005. 95 с.
ISBN 5-7636-0720-1

Изложены методы анализа плохо организованных систем с позиций их применяемости при исследованиях, проводимых в маркетинговой деятельности.

Рассмотрены статистические способы оценивания значимости факторов, эффективности рандомизации, однородности наблюдений, статистических связей, резко выделяющихся наблюдений, однородности оценок математических ожиданий и дисперсий, а также ситуации, анализируемые с помощью экспертных методов, дисперсионного анализа, элементов теории массового обслуживания, типовых задач управления запасами, кластерного анализа. Все изложенные методы иллюстрированы примерами с реальными цифрами, взятыми преимущественно из журнальных статей.

Предназначено для студентов экономических специальностей вузов всех форм обучения.

УДК 681.3:33(07)

ISBN 5-7636-0720-1

А. Л. АЛИФАНОВ
(27.01.1941–08.01.2005)

Аскольд Леонидович Алифанов родился в г. Шахты Ростовской области. Имя ему выбрал отец, Леонид Андреевич, назвав в честь первого киевского князя. Отец, работавший шахтером, ушел на фронт добровольцем и погиб в 1942 г. в бою под Харьковом. Послевоенное детство прошло в деревнях Ростовской области и в Ростове-на-Дону, где он жил то с бабушкой Анной Ефимовной, то с дядей Валентином Андреевичем, который заменил ему отца, то с матерью Марией Федоровной – учителем начальных классов. После окончания средней школы в 1957 г. попытался реализовать свою мечту – стать военным летчиком. Несмотря на отличный аттестат и здоровье поступить в летное училище с первой попытки не удалось. Его знаменитый земляк – Александр Иванович Лебедь, оказавшись в аналогичной ситуации, пошел в Воздушно-десантные войска. Аскольд в то время послушался своего дядю – артиллерийского офицера, преподавателя тактики в РАУ, который, наблюдая падение авторитета армии, советовал воспитаннику прервать старинную семейную традицию. В том же году Аскольд поступил в Ростовский институт инженеров железнодорожного транспорта. В 1962 г., получив квалификацию инженера-механика по строительным и дорожным машинам, был направлен на работу в трест Красноярсктрансстрой Министерства транспортного строительства СССР. До 1969 г. работал по специальности в сфере ремонта и эксплуатации автомобилей и дорожных машин.

В 1969 г. был принят по конкурсу ассистентом на кафедру СДМ Красноярского политехнического института, в 1971 г. поступил в аспирантуру Московского автомобильно-дорожного института. Диссертационную работу выполнял под руководством Льва Владимировича Дехтеринского на кафедре «Производство и ремонт автомобилей и дорожных машин». В Москве Аскольду посчастливилось учиться у известных математиков Елены Сергеевны Вентцель и Сима Борисовича Норкина, определивших его последующий интерес к теории вероятностей и математической статистике.

После защиты в 1974 г. кандидатской диссертации «Исследование эффективности прогнозирования при заводской аттестации качества капитального ремонта коробок передач автомобиля ЗИЛ-130» продолжил работу в Красноярском политехническом институте, а с 1983 г. работал доцентом кафедр ПТ, СДМиО в Норильском индустриальном институте.

В середине 90-х годов XX в. обстоятельства заставили его задуматься о защите докторской диссертации. Поскольку все годы работы в вузах Л. А. Алифанов активно занимался научной работой, то к 1999 г. он сумел подготовить и защитить докторскую диссертацию «Методические основы прогнозирования потребности в ремонтах агрегатов и автомобилей для обеспечения работоспособности автомобильного парка Северного региона» в Московском автомобильно-дорожном институте (техническом университете). До последнего дня жизни А. Л. Алифанов активно трудился в должности профессора в Норильском индустриальном институте.

ВВЕДЕНИЕ

Маркетинг как вид человеческой деятельности, направленной на удовлетворение нужд и потребностей посредством обмена [7], подвержен влиянию огромного количества факторов демографического, экономического, природного, научно-технического, политического, культурного характера. Они проявляют себя в случайные моменты времени, в различных сочетаниях, с разной степенью воздействия на эффективность маркетинговой деятельности.

Стратегическое планирование, разработка годовых планов и маркетинговый контроль невозможны без знания рыночной ситуации и формирующих ее факторов макро- и микросреды. Поэтому необходимо выявление наиболее значимых их них с целью построения оптимизационных моделей и написания сценариев, позволяющих осуществлять последовательное и глубокое внедрение на рынки.

Маркетинговая ситуация быстро меняется, уровень значимости факторов, существенных в настоящий момент, через относительно малый промежуток времени может повыситься или снизиться; с развитием рынка на первое место могут выходить качественно новые факторы, коренным образом изменяя условия производства, сбыта и потребления.

В настоящем пособии изложены наиболее простые и эффективные способы, лежащие в основе формирования статистических банков – совокупностей «современных методик статистической обработки информации, позволяющих наиболее полно вскрыть взаимозависимости в рамках подборки данных и установить степень их статистической надежности» [7], а также банков моделей.

Как статистические банки, так и банки оптимизационных и прогнозных моделей требуют постоянного поддержания уровня их надежности за счет совершенствования самих методик и моделей. Изложенные в пособии методики и модели представляют собой фундаментальные знания, на основе которых осуществляется повышение уровня их эффективности.

В первой главе рассмотрены методы и примеры решения задач проверки статистических гипотез при исследовании различных аспектов маркетинговой деятельности с помощью критериев математической статистики. Приведены способы оценивания существенности факторов, влияющих на показатели маркетинга, и значимости систематически действующих факторов на результаты работы фирм. Представлены методы проверки однородности объемов продаж ведущими компаниями, оценки статистической связи между показателями функционирования организаций и резко выделяющихся показателей реального денежного дохода населения. Произведен анализ однородности выручки, получаемой от российского экспорта основных видов продукции, и однородности условий маркетинговой деятельности.

Вторая глава посвящена анализу факторов, обуславливающих эффективность маркетинговой деятельности. Здесь приведены методика и решение задачи с помощью однофакторного дисперсионного анализа: оценка значимости влияния местонахождения пункта продаж на цены автомобилей, а также методика и решение задач с помощью двухфакторного дисперсионного анализа: оценка существенности влияния двух факторов и их взаимодействия на показатели маркетинга.

В третьей главе на примерах проиллюстрированы приемы применения непараметрических методов исследования в маркетинге для количественного оценивания качественных состояний или свойств объектов. Рассмотрены примеры выявления уровня надежности автомобильных узлов, а также уровни эффективности использования различных видов транспорта крупными отправителями. Изложены элементы кластерного анализа в свете оценивания существенности влияния рейтинга марки товара на прибыль фирм.

В четвертой главе изложен один из важнейших аспектов маркетинга – управление запасами. Приведены описание задач теории и способы определения оптимальных размеров партий товара для двух вариантов: в случае равномерного спроса и в случае модели производственных поставок.

В пятой главе рассмотрены понятия теории массового обслуживания и на примерах показаны варианты использования простейших моделей для вычисления основных показателей систем, находящих применение в различных сферах маркетинговой деятельности.

Изложение приведенных в данном пособии методик ориентировано на выполнение расчетов вручную. На практике более удобно осуществлять исследования в специализированных пакетах программ, либо программировать вычислительные алгоритмы самостоятельно, однако, в процессе обучения «ручной» счет предпочтительнее, так как помогает лучше усвоить материал и закрепить его понимание на интуитивном уровне.

1. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

1.1. Предпосылки использования в маркетинговых исследованиях статистических методов

При исследованиях показателей маркетинговой деятельности в реальных условиях во многих случаях приходится иметь дело с практически трудно управляемыми или вовсе не управляемыми, трудно изменяемыми или даже не изменяемыми исследователем факторами. Это весьма затрудняет или вовсе исключает целенаправленное варьирование их уровнями по заранее разработанному применительно к конкретной ситуации или выбранному плану, и воплощение его (даже если это принципиально возможно) может оказаться слишком дорогостоящим.

Тем не менее, если хотя бы один фактор управляем, а остальные сравнительно легко контролируемы, проводят эксперименты в разнородных условиях, сообразуясь с целью исследования и материальными возможностями.

Когда эксперименты проводятся с факторами, часть которых управляема, а другая часть неуправляема, но контролируема, то они называются активно-пассивными, если же все факторы управляемы и контролируемы – активными. Активные эксперименты предполагают отбор существенных факторов, задание границ факторного пространства, минимизацию числа опытов, построение модели, адекватной данным, и отыскание оптимума. Но уже только одно ограничение факторного пространства само по себе сильно сужает поиск и процесс формирования новых знаний, поэтому такой подход к экспериментированию в большинстве случаев, скорее, позволяет уточнить знания об объекте и упорядочить их, т. е. по сути активные эксперименты эффективны лишь на горизонтальном уровне.

Главным способом изучения маркетинговых ситуаций является наблюдение – «восприятие объекта без активного вмешательства в его поведение», хотя и «исследователь вынужден пассивно ожидать естественного проявления необходимых эффектов в поведении объекта, что значительно удлиняет ожидаемое время сбора необходимой информации» [2]. Наблюдение особенно эффективно, когда факторы трудно управляемы или неуправляемы, но контролируемы. Современные методики обработки наблюдений позволяют получать приемлемые результаты, делать достаточно точные выводы, выдвигая гипотезы и принимая или отвергая их.

Статистическая гипотеза – любое предположение о свойствах случайной величины. Выдвигаемые гипотезы подразделяются на исходную (основную), так называемую, нуль-гипотезу H_0, и конкурирующие гипотезы H_1, H_2, ...H_n. Если нулевая гипотеза отвергается, то в качестве основной принимается первая из конкурирующих, если и она отвергается, то принимается вторая и т. д.

При проверке статистических гипотез используется понятие уровня значимости α. Уровень значимости (или риск производителя – в терминологии науки о контроле качества) есть вероятность ошибки первого рода – отвергнуть правильную гипотезу. Вероятность противоположного события

$$P_{дов} = 1 - \alpha. \tag{1.1}$$

Вероятность ошибки второго рода – принять неправильную гипотезу (риск потребителя) β, вероятность противоположного события 1 – β – мощность критерия. В инженерных экономических и технических расчетах уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,1, поскольку эти значения соответствует, как правило, принятой точности измерений и объему выборок.

Можно уменьшить α – риск производителя, но тогда, вполне естественно, увеличится риск потребителя β, поэтому для уменьшения α и β необходимо увеличивать объем выборок, или увеличивать точность измерений, или увеличивать и то и другое.

Для проверки нуль-гипотезы наблюдаемое значение случайной величины сравнивают с критерием, который также является случайной величиной с известной функцией распределения. Найденные значения критерия могут находиться в критической области маловероятных значений и, напротив, в области принятия гипотез, где значения критерия допускаются с заданной доверительной вероятностью. Точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотез, называют критическими. Правосторонняя критическая область определяется неравенством

$$K > K_{кр}, \tag{1.2}$$

где K – случайная величина критерия; $K_{кр}$ – значение критерия, соответствующее критической точке.

Левосторонняя критическая область имеет место, когда

$$K < K_{кр}. \tag{1.3}$$

Двусторонняя критическая область отвечает неравенству

$$|K| > K_{кр}. \tag{1.4}$$

Например, для нахождения правосторонней критической области задаются уровнем значимости α и определяют по соответствующим таблицам критическую точку $K_{кр}$, руководствуясь следующим соображением: при условии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что $K > K_{кр}$, равна α:

$$P(K > K_{кр}) = \alpha. \tag{1.5}$$

Значит, если K находится в критической области, то нуль-гипотеза отвергается, а вероятность того, что $K > K_{кр}$, равна α – вероятности отвергнуть правильную гипотезу.

Двусторонняя критическая область, отвечающая требованиям $|K| > K_{кр}$ или $K < K_{1кр}$ и $K > K_{2кр}$ при $K_{2кр} > K_{1кр}$, определяется как сумма:

$$P(K < K_{1кр}) + P(K > K_{2кр}) = \alpha. \tag{1.6}$$

При симметричном распределении критерия имеет место выражение

$$P(K > K_{кр}) = \alpha/2, \tag{1.7}$$

т. е. вероятность того, что найденный критерий попадает в правостороннюю критическую область, равна α/2 (при такой же вероятности попадания в левостороннюю критическую область, что в сумме дает α).

1.2. Оценка существенности факторов, влияющих на объем производства товара, с помощью непараметрического критерия знаков

Критерий знаков является одним из самых простых способов выявления существенных факторов. Он основан на N-статистике и служит для проверки гипотезы о равной вероятности положительного и отрицательного исходов для последовательности независимых событий. Результаты наблюдений (испытаний) независимы, если каждый из них не подвержен влиянию предыдущего и не содержит информации о последующем.

Если гипотеза о равной вероятности исходов независимых испытаний (их число равно n) $P\{+\} = P\{-\}$ не отвергается, то нужно предположить, что исследуемый фактор, варьируемый экспериментатором, не оказывает влияния на результат испытаний. Единственное условие – отсутствие влияния других значимых факторов, кроме исследуемого.

Если количество положительных исходов равно μ, то для проверки гипотезы H_0: $p = 0{,}5$ (при конкурирующих H_1: $p < 0{,}5$; H_2: $p > 0{,}5$; H_3: $p \neq 0{,}5$) по табл. 1 приложения определяют критические значения $N(\alpha, \mu)$ и $N(\alpha, n - \mu)$, соответствующие заданному уровню значимости.

1. При альтернативе $\{p < 0{,}5\}$ основная гипотеза отвергается с уровнем значимости α, если $n \geq N(\alpha, \mu)$.

2. При альтернативе $\{p > 0{,}5\}$ основная гипотеза $p = 0{,}5$ отвергается с уровнем значимости α, если $n \geq N(\alpha, n - \mu)$.

3. При двусторонней альтернативе $\{p \neq 0{,}5\}$ основная гипотеза $p = 0{,}5$ отвергается с уровнем значимости 2α, если $n \geq N(\alpha, \min\{\mu, n - \mu\})$.

Пример. По данным источника [16], приведенным в табл. 1, требуется оценить влияние географического расположения района (восток – запад) на производство фальшивых напитков l_i, млн дкл в 1999 г.

Таблица 1

Производство напитков в РФ по районам, млн дкл (значения округлены)

1. Центральные, южные и западные районы РФ						Σ
Калининградская область	Волго-Вятский	Центральный	Центрально-Черноземн.	Северо-Кавказск.	Поволжский	
2,0	6,0	26,0	3,4	7,8	12,4	57,6
2. Северные и восточные районы РФ						
Уральск.	Западносибирск.	Восточ.-сибирск.	Дальневосточный	Северный	Северо-западн.	Σ
13,6	9,7	4,9	6,5	3,4	1,4	39,5

Решение. Чтобы можно было воспользоваться рассматриваемым критерием, область возможных значений производства напитков R по обеим группам районов делится на две равные части:

$$R_1 = R_2 = R/2 = (l_{max} – l_{min})/2, \qquad (1.8)$$
$$R/2 = (26 – 1{,}4)/2 = 12{,}3 \text{ млн дкл},$$

где R_1 – область положительных значений производства напитков; R_2 – область отрицательных значений, l_{max} – значение максимального объема производства (Центральный район), l_{min} – значение минимального объема производства (Северо-западный район).

Количество положительных исходов для первой группы (больших граничного значения 12,3) равно 2 (Центральный и Поволжский районы); для второй группы районов количество положительных исходов равно 1 (Уральский район). Поэтому $\mu = 2 + 1 = 3$ и при $\alpha = 0{,}1$ по табл. 1 приложения $N(0{,}1; 3) = 12$. Поскольку число районов также равно $n = 12$ и, значит, $n = N(0{,}1; 3)$, то гипотеза (имеется в виду двусторонняя альтернатива) о независимости от географического расположения района объема производства фальшивых напитков отвергается. Скорее всего, место расположения района (в смысле принадлежности его к первой или второй группе) все-таки влияет на объем производства фальшивой продукции.

Если же повторить процедуру отдельно для каждой группы районов, то окажется, что внутри групп расположение района не оказывает влияния на объем производства. Например, для первой группы области положительных r_1 и r_2 отрицательных значений равны:

$$r_1 = r_2 = r/2 = (l_{1max} – l_{1min})/2; \; r/2 = (26 – 2)/2 = 12 \text{ млн дкл}.$$

Количество положительных исходов для первой группы районов равно 2, поэтому $\mu = 2$. При числе районов первой группы $n_1 = 6$ и уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ величина $n_1 < N_{кр}\,(0{,}1; 2) = 9$ (табл. 4, приложения), т. е. гипотеза об отсутствии влияния на объем производства фальшивых напитков расположения района, если он находится в 1-й группе, не отвергается. Вариация же объемов производства внутри групп объясняется другими факторами.

1.3. Оценка значимости систематически действующих факторов на результат деятельности фирм с использованием критерия для количества серий

В случае проверки эффективности рандомизации (целью которой является исключение существенного влияния на исследуемый объект систематически действующих факторов) и отсутствия систематических ошибок при осуществлении наблюдений используют критерий для количества серий.

Пример. В табл. 2 представлены данные по числу продаж k компьютеров [15], тыс. шт., лидерами рынка Европы, Ближнего Востока и Африки за 1998 и 1999 гг. Требуется оценить влияние систематически действующих факторов (собственно года продаж, имиджа компании и т. п.) на результат деятельности фирм.

Таблица 2

Число продаж компьютеров компаниями – лидерами рынка

Год продаж	Компании					Σ	Σ Σ
	Compaq	Fujitsu-Siemens	Dell	IBM	Hewlett-Packard		
1998	4,8	2,8	2,1	2,4	1,8	13,9	
1999	5,5	3,7	2,9	2,8	2,3	17,2	31,1

Решение. Среднее число продаж компьютеров, приходящееся на каждую компанию в год

$$\tilde{m}(k) = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{gn}, \qquad (1.9)$$

$$\tilde{m}(k) = \frac{31{,}1}{2 \cdot 5} = 3{,}11.$$

где k – объем продаж i-й фирмой; n – число фирм; g – число лет продажи.

Считая, что данные в табл. 2 расположены в порядке их регистрации, присваивают знак (+) соответствующим продажам (и фирмам), которые превышают $\tilde{m}(k)$, и знак (–) продажам, меньшим, чем $\tilde{m}(k)$.

Получаем последовательность из четырех серий: + – – – – + + – – –. Первая серия состоит из (+), вторая – из (– – – –), третья – из (+ +), четвертая – из (– – –). Количество минусов n = 7, количество плюсов m = 3.

Если найденное по результатам наблюдений количество серий γ удовлетворяет неравенствам

$$g(\alpha; m; n) < \gamma < G(\alpha; m; n), \qquad (1.10)$$

то гипотеза о случайном характере данных не отвергается. Если хотя бы одно из неравенств нарушится, то гипотезу следует отвергнуть. Здесь $g(\alpha; m; n)$ и $G(\alpha; m; n)$ – соответственно нижнее и верхнее критические значения для количества серий.

По табл. 2 приложения при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ нижнее критическое значение равно 2, верхнее –8, следовательно, неравенство выполняется и можно считать, что в данной совокупности наблюдений систематически действующие факторы не влияют на количество продаж.

1.4. Анализ компьютерного рынка с позиций однородности объемов продаж лидирующими компаниями

Для проверки гипотезы об однородности двух выборок $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ и $\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_m$ с независимыми элементами используют критерий Вилкоксона W. Проверяется основная гипотеза H_0, предполагающая, что обе выборки принадлежат одной и той же совокупности:

$$H_0: P\{\xi < x\} \equiv P\{\xi' < x\} \quad (|x| < \infty). \qquad (1.11)$$

Конкурирующей может быть гипотеза

$$H_1: P\{\xi < x\} \neq P\{\xi' < x\}. \qquad (1.12)$$

Предполагается, что объем первой выборки m не превышает объема n второй, т. е. $m \le n$, если это не так, то выборки просто перенумеровывают.

Расположив значения выборок в одном вариационном ряду в порядке возрастания и пронумеровав их, находят значение W-статистики ($W_{набл.}$) – сумму порядковых номеров для значений первой выборки, затем по табл. 3 приложения находят значение нижней критической точки $w_{нижн.\ кр}$ $(\alpha/2; m; n)$ при двусторонней критической области, а значение верхней критической точки находят по формуле:

$$w_{верхн.кр} = (m + n + 1)m - w_{нижн.кр}. \qquad (1.13)$$

При $w_{нижн.кр} < W_{набл.} < w_{верхн.кр}$ нулевую гипотезу не отвергают.

Поскольку таблицы популярных изданий [1, 5] не содержат значений w – критических точек при m и n больших 25, то значение $w_{нижн.кр}$ вычисляется по приведенным в источнике [1] формулам.

Пример. Оценить однородность долей лидеров компьютерного рынка Европы, Ближнего Востока и Африки в 1998 и 1999 гг. [15]. Данные выборок приведены в табл. 3.

Таблица 3

Исходные данные
для расчета однородности долей рынка в 1998 и 1999 гг.

Годы продаж	Компании				
	Compaq	Fujitsu-Siemens	Dell	IBM	Hewlett-Packard
1998	16,8	9,7	7,4	8,5	6,4
1999	16,6	11,1	8,8	8,4	6,8

Решение. Данные табл. 3 располагаются в виде вариационного ряда в порядке возрастания, им присваиваются порядковые номера:

6,4;	6,8;	7,4;	8,4;	8,5;	8,8;	9,7;	11,1;	16,6;	16,8
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Вычисляется сумма номеров для 1998 г., она составляет:

$$W_{набл.} = 1 + 3 + 5 + 7 + 10 = 26.$$

По табл. 3 приложения при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$, а для двусторонней критической области $\alpha/2 = 0{,}05$ и $m = n = 5$, значения нижней и соответственно верхней критических точек равно соответственно:

$$w_{нижн.кр}\,(0{,}05;\,5;\,5) = 19; \quad w_{верхн.кр} = (5 + 5 + 1)5 - 19 = 36.$$

Поскольку

$$w_{нижн.кр}\,(0{,}05;\,5;\,5) < W_{набл.}\,(\text{равное } 26) < w_{верхн.кр}\,(0{,}05;\,5;\,5),$$

гипотеза о принадлежности двух выборок одной генеральной совокупности не отвергается. Следовательно, маркетинговые мероприятия, проведенные в течение этих лет, не позволили фирмам существенно увеличить свое влияние на компьютерном рынке и потеснить конкурентов.

1.5. Вычисление количественной оценки статистической связи между качественными показателями деятельности фирм

Для оценки наличия и тесноты связи между двумя объектами, свойства которых описываются качественными показателями, используют метод ранжирования, присваивая показателям каждого объекта ранг от 1 до n в порядке, соответствующему ухудшению свойств, и вычисляют коэффициент ранговой корреляции.

Результат такой процедуры может найти применение в случае сравнительной оценки как деятельности фирм, так и производимой ими продукции при сопоставлении ее с более совершенной. Это позволит своевременно скорректировать план маркетинга в части повышения качества и установления оптимальной цены на товар.

Пример 1. В табл. 4 приведена оценка имиджа основных пивоваренных предприятий (ОАО «Ярпиво» и ОАО «Балтика») по девяти показателям на рынке Ярославской области по пятибалльной шкале [14]. Требуется оценить связь между показателями фирм «Ярпиво» и «Балтика», присвоив ранги соответствующим баллам (столбцы 3 и 5), с помощью выборочного коэффициента ранговой корреляции Спирмена.

Таблица 4

Сравнительная характеристика предприятий по основным показателям

Показатели (высказывания потребителей)	ОАО «Ярпиво»		ОАО «Балтика»	
	Оценка	Ранг (X)	Оценка	Ранг (Y)
Хорошо известная компания	4,9	1	4,9	1
Компания с большим будущим	4,7	2	4,8	2
Компания, способная противопоставить свою продукцию конкурентам	4,5	3	4,6	3
Быстрорастущая компания	4,4	4	4,6	3
Компания, вызывающая доверие	4,3	5	4,5	4
Компания, заботящаяся о потребителе своей продукции	4,2	6	4,3	5
Компания, заботящаяся о качестве своей продукции	4,1	7	4,3	5
Фирма, проводящая хорошо рекламную кампанию	4,0	8	3,9	6
Компания, проводящая правильную ценовую политику	4,0	8	3,5	7

Решение. Для вычисления коэффициента ранговой корреляции определяют разности рангов по каждому показателю:

$$d_i = x_i - y_i.$$

$d_1 = 1 - 1 = 0$; $d_2 = 2 - 2 = 0$; $d_3 = 3 - 3 = 0$; $d_4 = 4 - 3 = 1$;
$d_5 = 5 - 4 = 1$; $d_6 = 6 - 5 = 1$; $d_7 = 7 - 5 = 2$; $d_8 = 8 - 6 = 2$; $d_9 = 8 - 7 = 1$.

Сумма квадратов разностей рангов

$$S_p = \sum_{i=1}^{9} d_i^2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 12.$$

Значение коэффициента ранговой корреляции при числе объектов, равном $n = 9$:

$$\rho = 1 - \frac{6S_p}{n^3 - n}; \qquad \rho = 1 - \frac{6 \cdot 12}{9^3 - 9} = 0{,}9.$$

Существенность коэффициента корреляции проверяется с помощью t-критерия Стьюдента, затем исследуется гипотеза о равенстве нулю коэффициента ранговой корреляции для генеральных совокупностей H_0: $\rho = 0$ при конкурирующей H_1: $\rho \neq 0$. При $|\rho| > T_{кр}$ нулевая гипотеза отвергается. Величина критической точки вычисляется по формуле

$$T_{кр} = t_{кр}(\alpha; k)[(1 - \rho^2)/(n - 2)]^{0,5}, \qquad (1.14)$$

где α – уровень значимости, $\alpha = 0{,}1$; k – число степеней свободы, $k = n - 2$; n – объем выборки.

По табл. 7 приложения для двусторонней критической области определяется значение $t_{кр}(0{,}1; 7) = 1{,}8946$, тогда

$$T_{кр} = 1{,}8946[(1 - 0{,}9^2)/(9 - 2)]^{0,5} = 0{,}31.$$

Поскольку $|\rho| > T_{кр}$, нулевая гипотеза отвергается, коэффициент ранговой корреляции $\rho = 0{,}9$ значим.

Пример 2. По данным табл. 4, записанным в виде табл. 5, рангов требуется оценить связь между показателями деятельности фирм с помощью коэффициента ранговой корреляции Кендалла.

Таблица 5

Ранговые оценки показателей деятельности
ОАО «Ярпиво» и «Балтика»

ОАО «Ярпиво», x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	8
ОАО «Балтика» y_i	1	2	3	3	4	5	5	6	7

Решение. Правее y_1 находятся 8 рангов, больших, чем y_1 (2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7), поэтому $R_1 = 8$. Правее y_2 – 7 рангов (3, 3, 4, 5, 5, 6, 7), поэтому $R_2 = 7$ и далее: $R_3 = 5$; $R_4 = 5$; $R_5 = 4$; $R_6 = 2$; $R_7 = 2$; $R_8 = 1$. Сумма рангов $R = 34$.

Коэффициент ранговой корреляции Кендалла при $n = 9$

$$t_в = \frac{4R}{n(n-1)} - 1; \qquad t_в = \frac{4 \cdot 34}{9(9-1)} - 1 = 0{,}89.$$

Значимость коэффициента $\tau_в$ оценивается также с помощью t-критерия. Проверяется нулевая гипотеза о равенстве нулю генерального коэффициента ранговой корреляции H_0: $\rho_г = 0$ при конкурирующей H_1: $\rho_г \neq 0$.

Значение, соответствующее критической точке, вычисляется по формуле

$$T_{кр} = z_{кр}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}, \qquad (1.15)$$

где $z_{кр}$ – критическая точка двусторонней критической области, отвечающая равенству $\Phi(z_{кр}) = (1 - \alpha)/2$; n – объем выборки.

При $|\tau_в| > T_{кр}$ нулевая гипотеза отвергается.

Для вычисления $T_{кр}$ вначале с помощью функции Лапласа (табл. 8 приложения) при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ определяется критическая точка $z_{кр}$ из соотношения

$\Phi(z_{кр}) = (1 - \alpha)/2 = (1 - 0{,}1)/2 = 0{,}45$, откуда $z_{кр} = 1{,}645$, тогда

$$T_{кр} = 1{,}645\sqrt{\frac{2(2 \cdot 9+5)}{9 \cdot 9(9-1)}} = 0{,}44.$$

Поскольку $|\tau_в| > T_{кр}$, нуль-гипотеза отвергается, согласно альтернативной гипотезе H_1 выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла так же как и коэффициент, найденный по способу Спирмена, значим. Тот факт, что они несколько разнятся между собой, неважен, так как область возможных значений случайной величины ρ охватывает значение $\tau_в$, являющегося также случайной величиной.

По результатам расчета можно сказать, что и той, и другой компании следует внимательно отнестись к пункту о проведении правильной ценовой политики, а фирме «Ярпиво» обратить внимание еще и на повышение качества своей продукции: при однородности всех остальных показателей качество продукции фирмы «Ярпиво» резко снизило коэффициент ранговой корреляции между показателями фирм. Характер других оценок показывает, что обе фирмы находятся на подъеме, но вся их деятельность направлена только на агрессивный захват рынка любой ценой, включая здоровье покупателей, и потребителю следовало бы обходить стороной их продукцию.

1.6. Оценивание резко выделяющихся показателей динамики реального денежного дохода населения

Результаты маркетинговых измерений могут содержать грубые ошибки и случайные просчеты, причем далеко не всегда представляется возможность продублировать эксперимент в тех же самых условиях и, таким образом, возникает риск потери ценной информации либо использования искаженной, привносящей недопустимую ошибку в расчеты неверной информации.

В то же время резко выделяющиеся, аномальные наблюдения могут быть абсолютно достоверными, содержащими совершенно новую, ранее не наблюдавшуюся закономерность или явление, и поэтому необходим анализ, выявление причинно-следственных связей, приведших к появлению резко выделяющегося среди других результата. Если же выяснится, что аномальное наблюдение появилось не из-за грубых ошибок или просчетов, а по причине возникновения ранее не встречавшейся ситуации, то использование вновь полученных об объекте знаний может дать в маркетинговой деятельности весьма существенный положительный эффект.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда параметры распределения – математическое ожидание и дисперсии – неизвестны и заменяются их оценками, определяемыми по небольшой выборке.

Результаты опытов x_i располагаются в виде вариационного ряда, нулевая гипотеза, подлежащая проверке, H_0: $m^*(x) = x_n$ при конкурирующей H_1: $m^*(x) > x_{mi}$, здесь x_{mi} – резко выделяющееся наблюдение; $m^*(x)$ – оценка математического ожидания исследуемой величины.

Рассчитывается величина дзета-статистики по формуле

$$\varsigma(m^*(x), s(x)) = \frac{|x_{mi} - m^*(x)|}{s(x)}, \qquad (1.16)$$

где s – оценка среднего квадратического отклонения выборки.

При $\varsigma(m^*(x), s(x)) < \varsigma(n, \alpha)$ нулевую гипотезу не отвергают (n – объем выборки).

Пример 1. Данные, приведенные в табл. 6 [12], используются для прогнозирования спроса на рынке бытовой мебели. Оценить принадлежность к выборке резко выделяющихся наблюдений.

Таблица 6

Динамика уровня
реального располагаемого денежного дохода населения (РРДД), %,
в 1992–2002 гг. (за 2002 г. дан прогноз)

РРДД	52,5	116,4	111,9	83,9	100,8	106,3	83,7	86,8	110,9	105,9	105,5
Год	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002

После расположения их в виде убывающего вариационного ряда становится очевидным, что последняя цифра резко выделяется от остальных членов ряда:

116,4; 111,9; 110,9; 106,3; 105,9; 105,5; 100,8; 86,8; 83,9; 83,7; 52,5.

Требуется оценить принадлежность величины 52,5 к вариационному ряду.

Решение. Вычисляется оценка математического ожидания показателей динамики уровня РРДД:

$$m^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i}{n} = \frac{1064{,}6}{11} = 96{,}8.$$

Вычисляется оценки дисперсии и среднего квадратического отклонения ряда:

$$D^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m^*(x))^2}{n-1}; \quad s(x) = \sqrt{D^*(x)}; \quad D^*(x) = 347{,}6; \; s(x) = 18{,}6.$$

После вычисления значения дзета-статистики и отыскания по табл. 4 приложения критического значения при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ устанавливается, что нулевая гипотеза отвергается: значение 52,5 не принадлежит исследуемому вариационному ряду:

$$\varsigma = \frac{|52{,}5 - 96{,}8|}{18{,}6} = 2{,}3817 > \varsigma_{кр}(0{,}1;11) = 2{,}343.$$

В источнике [1] приведены более простые, но несколько менее мощные критерии, статистики которых задаются отношениями:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}, \qquad \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}, \qquad \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}, \tag{1.17}$$

где x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_2, x_1 – соответственно последний, предпоследний, третий от конца, второй и первый члены вариационного ряда.

Как и в предыдущем случае, проверяется нулевая гипотеза о принадлежности резко выделяющегося наблюдения к исследуемому вариационному ряду H_0: $x_n = x_i$, при конкурирующей H_1: $x_n < x_i$.

Численные значения отношений:

$$\frac{52{,}5-83{,}7}{52{,}5-116{,}4}=0{,}488; \qquad \frac{52{,}5-83{,}7}{52{,}5-111{,}9}=0{,}525; \qquad \frac{52{,}5-83{,}9}{52{,}5-116{,}4}=0{,}491.$$

При уровне значимости α = 0,1 и n = 11 критические точки (табл. 5 приложения) соответственно равны: 0,332; 0,385; 0,449. Поэтому нуль-гипотеза отвергается, следует признать, что значение 52,5 не принадлежит вариационному ряду.

Показатель динамики уровня реально располагаемого денежного дохода (РРДД) населения в 1992 г. резко отличается от показателей последующих лет. В этом смысле он не принадлежит к исследуемой генеральной совокупности потому, что управление и без того нестабильной, напрямую зависящей от международных цен на природные ресурсы экономики было подвержено в 1992 г. сильному воздействию негативных явлений. Эти явления в последующие годы стабилизировались и стали вполне нормальными, отвечающими современным, так сказать, требованиям, и неулавливаемыми для статистических критериев.

Однако при использовании информации о прошлом для прогнозирования динамики в будущие периоды показатель 1992 г. (как подтверждают сделанные расчеты) применять нельзя, если, конечно, у прогнозиста нет оснований предполагать новый всплеск провалов в управлении экономикой.

1.7. Проверка однородности выручки, получаемой от российского экспорта основных видов продукции

Для оценки однородности средних значений независимых нормально распределенных величин, дисперсии которых равны (однородны), но неизвестны, может быть использован критерий Аббе, статистика которого задается отношением

$$q = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2 / \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \right). \qquad (1.18)$$

Проверяется нуль-гипотеза H_0: $m^*_1(x) = m^*_2(x) = m^*_3(x) = m^*_4(x)$ при альтернативе H_1: $|m^*_{i+1}(x) - m^*_i(x)| > 0$.

Если найденное значение q-статистики превышает критическое, то гипотеза о равенстве средних отвергается.

Пример 1. Требуется проверить гипотезу об однородности вкладов, приведенных в табл. 7, видов продукции в выручку от экспорта (данные по четырем федеральным округам РФ) в предположении, что известны только $m_i^*(x)$ – средние значения выручки [17], а другой информации нет.

Таблица 7

Экспорт некоторых видов продукции России
в 2000 г. по федеральным округам, млн долл

Федеральные округа	Нефтехимические товары	Черные и цветные металлы	Машиностроительная продукция	Древесина и изделия из нее
Северо-западный	3,0	2,3	1,5	1,6
Южный	1,6	0,6	0,4	0,0
Сибирский	2,3	5,7	0,5	1,0
Дальневосточный	1,0	0,3	0,6	0,5
$m^*_i(x)$	1,98	2,23	0,75	0,78
$D^*_i(x)$	0,7	6,1	0,3	0,5

Значения средних представляют в виде вариационного ряда: 0,75; 0,78; 1,98; 2,23, со средним 1,43 и вычисляют q-статистику:

$$q = \frac{(0{,}78-0{,}75)^2 + (1{,}98-0{,}78)^2 + (2{,}23-1{,}98)^2}{2[(0{,}75-1{,}43)^2 + (0{,}78-1{,}43)^2 + (1{,}98-1{,}43)^2 + (2{,}23-1{,}43)^2]} = 0{,}41.$$

В соответствии с табл. 6 приложения значение q-статистики при $n = 4$ уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ составляет $q_{кр} = 0{,}3902 < q = 0{,}41$, поэтому гипотеза о равенстве средних отвергается.

Следовательно, вклад в экспортную выручку различных видов продукции по указанным районам неодинаков: на первом месте – нефтехимические товары, на втором – черные и цветные металлы, и так далее.

Однако при вычислении q-статистики Аббе используется не вся информация об объектах, поэтому для парного сравнения средних используют критерий Стьюдента (табл. 7 приложения), тогда его статистика:

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{(n-1)D^*(x_3) + (m-1)D^*(x_4)}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}; \qquad (1.19)$$

где $\bar{x}, \bar{y}$ – исследуемые средние значения; $D^*(x_3)$, $D^*(x_4)$ – оценки дисперсий случайных величин; n, m – объемы выборок; $(n - 1)$, $(m - 1)$ – числа степеней свободы оценок дисперсий.

Проверяется нулевая гипотеза H_0: $\bar{x} = \bar{y}$ при альтернативной H_1: $\bar{x} \neq \bar{y}$ при условии однородности оценок дисперсий и нормального распределения X и Y. Нулевая гипотеза отвергается, если $|t_{набл.}| > t_{двуст.кр}(\alpha/2; k)$, где α – уровень значимости, k – число степеней свободы, $k = n + m - 2$.

Пример 2. Оценить с помощью t-критерия однородность средних значений экспортной выручки для трех вариантов:

1) от машиностроительной продукции и древесины и изделий из нее при выполнении условия однородности оценок $D^*(x_3)$ и $D^*(x_4)$;

2) от нефтехимических товаров, черных и цветных металлов;

3) от нефтехимических товаров и древесины и изделий из нее.

Решение. 1. В соответствии с формулой

$$t = \frac{|0{,}75 - 0{,}78|}{\sqrt{(4-1)0{,}3 + (4-1)0{,}5}} \sqrt{\frac{4 \cdot 4(4+4-2)}{4+4}} = 0{,}07.$$

Найденное значение t-статистики меньше критического (табл. 7, приложения);

$$t_{набл.} = 0{,}07 < t_{двуст.кр}(0{,}1/2; 6) = 1{,}9432,$$

поэтому гипотеза о равенстве выручки по четырем районам РФ от машиностроительной продукции и от древесины и изделий из нее не отвергается.

2. Прежде, чем вычислить значение t-статистики для второго варианта, необходимо проверить однородность оценок дисперсий с помощью F-статистики (табл. 10 приложения):

$$F = \frac{D^*(x_2)}{D^*(x_1)} = \frac{6{,}1}{0{,}7} = 8{,}7 > F_{кр}(0{,}1;3;3) = 5{,}3908,$$

т. е. оценки дисперсий для исследуемых товаров X_1 и X_2 неоднородны, t-критерий не позволяет решать задачу об однородности $m^*(x_1)$ и $m^*(x_2)$.

3. Здесь очевидно, что оценки дисперсий однородны, значение t-статистики

$$t = \frac{|1{,}98 - 0{,}78|}{\sqrt{(4-1)0{,}7 + (4-1)0{,}5}} \sqrt{\frac{4 \cdot 4(4+4-2)}{4+4}} = 2{,}19\,,$$

поскольку $t_{набл.} = 2{,}19 > t_{двуст.кр}$ (0,1/2; 6) = 1,9432 (табл. 7 приложения). Средние значения товаров X_1 и X_4 неоднородны, экспортная выручка от товаров нефтехимии больше, чем от древесины и изделий из нее. Все это согласуется с результатом, полученным при использовании критерия Аббе, который дает положительный ответ по поводу однородности средних значений только в случае, когда все средние однородны, но, если хотя бы одно значение неоднородно с каким–либо другим, то и ответ будет отрицательным.

Однородность средних для зависимых выборок проверяется с помощью d-статистики. Проверяется нулевая гипотеза $H_0 : M^*(X) = M^*(Y)$ при конкурирующей H_0: $M^*(X) \neq M^*(Y)$.

Пример 3. Средний балл успеваемости группы ИЭ-00 по математике в первом семестре по результатам экзаменационной сессии составил 3,43, во втором – 3,52, в третьем – 3,65, в четвертом – 3,74. Оценить однородность средних баллов, полученных студентами группы ИЭ-00 в 1-м и 4-м семестрах по математике во время экзаменационных сессий (табл. 8).

Таблица 8

Баллы, полученные студентами группы ИЭ-00 по математике в 1-м и 4-м семестрах

Семестр	Балл																						
1	3	3	3	3	3	4	3	3	3	5	3	4	3	4	3	3	3	5	4	4	3	3	4
4	4	3	3	3	4	5	3	3	4	4	3	4	3	4	4	3	3	5	4	5	4	3	5

Решение. Выборки зависимы, так как баллы 1-го и 4-го семестров в каждом столбце получены одним и тем же студентом и в силу этого являются попарно зависимыми.

Вычисляется среднее значение разностей баллов

$$d^* = \Sigma d_i / n,$$

где $d_i = x_i - y_i$; x_i, y_i – баллы студентов, полученные ими в 1-м и 4-м семестрах соответственно, n – число студентов в группе.

$$d_1 = 3 - 4 = -1;\ d_2 = 3 - 3 = 0;\ldots;\ d_5 = 3 - 4 = -1;$$
$$d_6 = 4 - 5 = -1;\ldots;\ d_9 = 3 - 4 = -1;\ d_{10} = 5 - 4 = 1;$$
$$d_{15} = 3 - 4 = -1;\ldots;\ d_{20} = 4 - 5 = -1;\ d_{21} = 3 - 4 = -1;$$

$$d_{22} = 3 – 3 = 0;\ d_{23} = 4 – 5 = –1.$$
$$\Sigma d_i = – 1 – 1 – 1 – 1 + 1 – 1 –1 – 1 – 1 = – 7;$$
$$d^* = –7 / 23 = – 0{,}304.$$

Сумма квадратов разностей

$$\Sigma d^2_i = (–1)^2 + (–1)^2 +(–1)^2 + (–1)^2 + (+1)^2 + (–1)^2 +(–1)^2 + (–1)^2 + (–1)^2 = 9.$$

Среднее квадратическое отклонение разностей

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - [\sum d_i]^2 \frac{1}{n}}{n-1}};\ S_d = \sqrt{\frac{9 - 7^2 \frac{1}{23}}{22}} = 0{,}559.$$

Наблюденное значение T-статистики

$$T_{набл} = d^* n^{0,5}/S_d = – 0{,}304 \cdot 23^{0,5}/0{,}559 = – 2{,}6081.$$

Поскольку абсолютное значение T-статистики больше, чем критическое значение $t_{двуст.кр.}(0{,}10;\ 32) = 1{,}70$ (табл. 7 приложения), средние баллы 1-го и 4-го семестров неоднородны, поэтому можно считать, что от 1-го к 4-му семестру имеет место небольшое, но значимое повышение успеваемости.

1.8. Оценка однородности условий маркетинговой деятельности

Все этапы маркетинга как деятельности, направленной на удовлетворение нужд и потребностей людей, от производства товаров до потребления зависят от множества факторов, в том числе от неуправляемых и неконтролируемых. Результаты наблюдений характеризуются оценками математических ожиданий и дисперсий.

Если две (или несколько) выборки исследуемой величины получены при воздействии одних и тех же и с одинаковой интенсивностью влияющих на результат факторов (т. е. в однородных условиях), то оценки их математических ожиданий и дисперсий не должны существенно отличаться (т. е. выборки будут принадлежать одной и той же генеральной совокупности). Поэтому при проверке гипотезы об однородности двух выборок вначале проверяют однородность оценок дисперсий, позволяющую предположить однородность условий проведения наблюдений, и только в случае их однородности проверяют однородность средних.

Если при проведении эксперимента варьируется один (или несколько) из числа предположительно значимых факторов и при фиксации его (или их) на заранее выбранных уровнях, которые могут иметь место в естественных условиях, регистрируются значения исследуемой величины, то оценки дисперсий в выборках должны быть однородными, поскольку условия однородности воспроизведения опытов не нарушаются. Оценки математических ожиданий выборок будут неоднородными, если фактор (или несколько варьируемых факторов) значим, и однородными, если фактор незначим.

Во всех случаях однородность условий проведения опытов предполагает однородность оценок дисперсий. Обратное утверждение (однородность дисперсий означает однородность условий проведения опытов) может быть верным, если имеются все физические предпосылки для этого.

При сравнении двух выборочных независимых дисперсий используется F критерий *Фишера*, при этом для проверки нулевой гипотезы H_0: $D^*(x_1) = D^*(x_2)$ вычисляется отношение большей оценки дисперсии к меньшей. В качестве конкурирующей принимается H_1: $D^*(x_1) > D^*(x_2)$ либо H_2: $D^*(x_1) \neq D^*(x_2)$, во втором случае имеет место двусторонняя критическая область.

Найденное $F_{набл.}$ сравнивается с критическим значением (табл. 10 приложения) при заданном уровне значимости α ($\alpha/2$ при двусторонней критической области) и числах степеней свободы оценок дисперсий f_1 и f_2 (число степеней свободы оценки дисперсии равно объему наблюдений минус единица).

В случае $F_{набл.} < F_{кр}(\alpha; f_1; f_2)$ гипотеза об однородности оценок дисперсий не отвергается.

Пример. В качестве сравнительной оценки культурного уровня населения, наличия культурных ценностей в стране существует показатель, характеризующий число посещений очагов культуры в течение года, приходящееся на 1 человека [19].

Для оценки однородности популярности различных центров культуры (табл. 9) требуется оценить однородность оценок дисперсий с помощью критерия Фишера (табл. 10 приложения).

Таблица 9

Уровень посещаемости музеев и театров
за рубежом и в России на 1 января 1999 г.

Страна	Посещение музеев, на 1 чел. в год	Посещение театров, на 1 чел. в год
1	2	3
Россия	0,5	0,3

Окончание табл. 9

1	2	3
США	1,3	1,6
Норвегия	1,9	2,5
Австрия	1,8	2,0
Канада	1,7	2,1
Германия	1,2	1,6
Италия	–	1,4
$m^*(x)$	1,4	1,6
$D^*(x)$	0,27	0,49

Решение. Критерий Фишера F вычисляется по формуле

$$F = \frac{D^*(x_2)}{D^*(x_1)} = \frac{0{,}49}{0{,}27} = 1{,}81 < F_{кр}(0{,}1;6;5) = 3{,}4045.$$

Следовательно, гипотеза об однородности оценок дисперсий не отвергается при уровне значимости α = 0,1. Сравнение средних, исключение резко выделяющихся наблюдений проводить можно. Кроме очевидного последнего места, занимаемого в настоящее время Россией можно предположить, что и музеи, и театры посещает публика одного уровня.

В тех случаях, когда требуется проверить гипотезу об однородности нескольких оценок дисперсий, вычисленных по выборкам одинакового объема, используют критерий *Кокрена*. Им удобно пользоваться, например, при проведении дисперсионного анализа.

Проверяется гипотеза H_0: $D^*_1(y) = D^*_2(y) = \ldots = D^*_n(y)$ при конкурирующей H_1: $D^*_j(y) > D^*_1(y) = D^*_2(y) = \ldots = D^*_i(y) = \ldots = D^*_n(y)$.

G-статистика критерия Кокрена выражается формулой:

$$G = \frac{D^*_{max}(y)}{D^*_1(y) + D^*_2(y) + \ldots + D^*_i(y) + \ldots + D^*_n(y)}, \qquad (1.20)$$

где $D^*_{max}(y) = max(D^*_1(y); D^*_2(y); \ldots D^*_i(y); \ldots D^*_n(y))$.

Если при уровне значимости α, числе степеней свободы каждой из оценок дисперсий f, равном объему каждой выборки минус единица, а также числе исследуемых оценок дисперсий n имеет место (табл. 11 приложения) выражение:

$$G_{набл.} < G_{кр.}(\alpha; f; n), \qquad (1.21)$$

то гипотеза об однородности оценок дисперсий не отвергается.

Пример 1. В табл. 10 приведены данные об объемах месячных продаж безалкогольного напитка «Тархун» в течение семи лет с 1993 по 1999 гг. [11]. Требуется оценить однородность оценок дисперсий ежемесячного потребления напитка, предполагающую неизменность воздействия значимых факторов на объем продаж по годам.

Таблица 10

Ежемесячное потребление безалкогольного напитка «Тархун» в 1993–1999 гг., тыс. дкл

Месяц	Год						
	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Январь	6,7	7,2	7,7	7,9	8,4	8,5	8,8
Февраль	6,6	6,9	7,3	7,4	7,8	8,4	8,8
Март	8,5	9,1	8,7	8,9	10,2	10,6	11,2
Апрель	8,5	9,1	9,3	9,8	10,4	10,9	10,9
Май	9,1	10,0	10,2	10,1	11,2	11,0	11,9
Июнь	10,6	10,5	10,3	9,8	11,9	12,6	13,0
Июль	10,6	9,8	11,5	11,4	12,0	12,6	12,1
Август	10,5	10,4	11,0	11,9	11,1	12,0	12,8
Сентябрь	9,0	8,9	9,3	10,5	10,5	10,9	11,0
Октябрь	7,8	8,3	9,2	9,9	9,7	9,7	10,5
Ноябрь	7,9	8,1	8,3	8,9	9,8	9,6	9,8
Декабрь	8,1	8,3	8,3	9,3	9,6	9,7	9,4
$m^*(y)$	8,7	8,9	9,3	9,7	10,2	10,5	10,9
$D^*(y)$	1,91	1,38	1,68	1,68	1,62	2,01	2,09

Решение. В двух последних строках табл. 10 представлены оценки математических ожиданий и дисперсий. Значение G-статистики

$$G = \frac{2{,}09}{1{,}91 + 1{,}38 + 1{,}68 + 1{,}68 + 1{,}62 + 2{,}01 + 2{,}09} = 0{,}169 < G_{кр}(0{,}05;11;7) = 0{,}3088.$$

Следовательно, гипотеза об однородности оценок дисперсий не отвергается, что говорит о стабильности и однородности условий в течение семи лет, в которых осуществлялась продажа напитка. Постоянное ежегодное увеличение продаж напитка ($m^*(y)$ возрастает) свидетельствует об успешном внедрении маркетинговых мероприятий.

При оценке однородности нескольких оценок дисперсий, найденных по выборкам неодинакового объема (число выборок более трех) из нормально распределенных генеральных совокупностей, используют критерий *Бартлетта*, основанный на M-статистике:

$$M = N\, ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} k_i D^*_i(y)\right) - \sum_{i=1}^{m} k_i\, ln\, D^*_i(y), \qquad (1.22)$$

где $N = \sum_{i=1}^{m} k_i$; k_i – число степеней свободы i-й дисперсии, равное соответствующему объему выборки минус единица; m – число сравниваемых оценок дисперсий; $D^*_i(y)$ – оценка i-й дисперсии.

Проверяется нулевая гипотеза H_0: $D^*_1(y) = \ldots = D^*_i(y) = \ldots = D^*_m(y)$ при конкурирующей H_1: $D^*_1(y) \neq D^*_i(y)$. Табл. 12 приложения содержит критические значения M-статистики в зависимости от наперед заданного уровня значимости α, числа степеней свободы $k = m - 1$ и величин C_1, C_3, C, ΔC, вычисляемые по формулам

$$C_1 = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i} - \frac{1}{N};\quad C_3 = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i^3} - \frac{1}{N^3};\quad C = \frac{C_1^3}{m^2};\quad \Delta C = C_1 - \frac{C_1^3}{m^2}. \qquad (1.23)$$

В некоторых случаях используется функция $m(\alpha)$, вычисляемая по формуле,

$$m(\alpha) = \frac{1}{\Delta C}[(C_1 - C_3)m_a(\alpha;k;C_1) + (C_3 - C)m_b(\alpha;k;C_1)]. \qquad (1.24)$$

Правила, применяемые при использовании M-критерия [1]:

1. Вычисляется значение M-статистики ($M_{набл.}$);

2. $M_{набл.}$ сравнивается со значениями m_a и m_b в строке k табл. 12 приложения; если при всех C_1 величина $m_a \le M$, то гипотезу о равенстве дисперсий H_0 отвергают, если же при всех C_1 имеет место $M \le m_b$, то H_0 не отвергается.

3. В тех случаях, когда $max\, m_a > M \ge min\, m_b$, вычисляют C_1 и по табл. 12, приложения находят $m_a(\alpha; k; C_1)$ и $m_b(\alpha; k; C_1)$; если $m_a(\alpha; k; C_1) \le M$, то H_0 отвергается; если же $M < m_b(\alpha; k; C_1)$, то H_0 не отвергается.

4. При $m_a(\alpha; k; C_1) > M \ge m_b(\alpha; k; C_1)$ вычисляется значение $m(\alpha)$; если $m(\alpha) \le M$, то H_0 отвергается; если же $M < m(\alpha)$, то H_0 не отвергается.

Пример 2. По данным табл. 11 проверить однородность оценок дисперсий экспорта продовольственных товаров и сырья для их производств, тыс. долл [17], из субъектов Российской федерации в 2000 г.

Таблица 11

Экспорт продовольственных товаров
и сырья для их производства из субъектов Российской Федерации в 2000 г.

№ п/п	Субъект Российской Федерации	Экспорт (тыс. долл)
1	Субъекты РФ, экспортирующие максимум товаров	$m^*_1(y) = 151{,}7$
	Москва	152,2
	Камчатская область	115,0
	Ростовская область	187,8
2	Северо-Западный федеральный округ	$m^*_2(y) = 34{,}9$
	Санкт-Петербург	54,7
	Калининградская область	34,5
	Мурманская область	37,5
	Новгородская область	13,0
3	Южный федеральный округ и Самарская область	$m^*_3(y) = 31{,}6$
	Краснодарский край	65,6
	Ставропольский край	23,0
	Астраханская область	16,2
	Московская область	57,6
	Волгоградская область	16,7
	Самарская область	26,9
	Белгородская область	15,4
4	Уральский и Сибирский федеральный округ	$m^*_4(y) = 31{,}7$
	Курганская область	40,9
	Челябинская область	12,4
	Алтайский край	34,9
	Новосибирская область	17,0
	Омская область	53,3
5	Дальневосточный федеральный округ	$m^*_5(y) = 49{,}5$
	Приморский край	81,2
	Хабаровский край	16,3
	Сахалинская область	51,1

Решение. Вычисляя по каждому j-му округу оценки математических ожиданий и дисперсий величин экспорта, их заносят в табл. 12.

$$m^*_j(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}; \qquad D^*_j(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - m^*_j(y))^2}{n-1};$$

Таблица 12

Вычисление параметров для нахождения M-статистики

№ п/п	$D^*_i(y)$	k_i	$1/k_i$	$k_iD^*_i(y)$	$lnD^*_i(y)$	$k_ilnD^*_i(y)$
1	1325	2	0,5	2650,4	7,1893	14,3786
2	292,9	3	0,33	878,6	5,6797	17,039
3	441,6	6	0,17	2649,7	6,0904	36,5425
4	287,5	4	0,25	1150,0	5,6612	22,6450
5	1054,8	2	0,5	2109,7	6,9611	13,9223
Σ		17	1,75	9438		104,5274

M-статистика равна

$$M = 17\ln\left(\frac{1}{17}9438\right) - 104{,}5 = 2{,}9.$$

Так как при уровне значимости α = 0,05 и числе степеней свободы k =5 – 1 = 4 величина M-статистики $m_b(0{,}05;\ 4;\ C_1)$ при любых C_1 больше $M_{набл.}$ (по табл. 12 приложения минимальное значение $m_b(0{,}05;\ 4;\ 0{,}0) = 7{,}81$), то гипотеза об однородности дисперсий не отвергается.

Замечание 1. Если предположить, что наблюдаемое значение M-статистики получилось равным 8,3, тогда необходимо было бы вычислить значение C_1, оно было бы равно:

$$C_1 = 1{,}75 - \frac{1}{17} = 1{,}69.$$

Используя линейную интерполяцию, по табл. 12 приложения получают $m_b(0{,}05;\ 4;\ 1{,}69) = 8{,}41$. Поскольку оно превышает $M_{набл.}$, то и в этом случае гипотеза об однородности дисперсий не отвергалась бы.

2. Если предположить, что наблюдаемое значение M-статистики $M_{набл.}$ = 8,5, т. е. согласно табл. 12 приложения получится, что $m_b < M_{набл.} < m_a$, то сначала нужно вычислить C_3, C, ΔC:

$$C_3 = \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{17^3} = 0{,}307; \quad C = 1{,}69^3/5^2 = 0{,}193;$$
$$\Delta C = 1{,}69 - 1{,}69^3/5^2 = 1{,}497.$$

Далее вычисляется величина $m(\alpha)$:

$$m(a) = \frac{1}{1{,}497}\left[(1{,}69 - 0{,}307)9{,}06 + (0{,}307 - 0{,}193)8{,}41\right] = 9{,}01.$$

Поскольку предполагаемое $M_{набл}$ = 8,5 < $m(\alpha)$ = 9,01, то гипотеза об однородности дисперсий и в этом случае не отвергалась бы.

2. АНАЛИЗ ФАКТОРОВ, ОБУСЛАВЛИВАЮЩИХ УСПЕХ УПРАВЛЕНИЯ МАРКЕТИНГОМ

2.1. Оценка значимости местонахождения пункта продаж на средние цены автомобилей

При воздействии на систему множества факторов (оцениваемых количественно или качественно) устанавливается связь между ними и признаком. Факторы – независимые случайные переменные, признак – зависимая случайная переменная. В качестве характеристики изменения признака используется полная дисперсия. Задача дисперсионного анализа – разложение полной дисперсии на составляющие:

$$\sigma_n^2(y) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \sigma_i^2(y) + \sigma_{ош}^2(y), \tag{2.1}$$

где $\sigma_n^2(y)$ – полная дисперсия, характеризующая изменчивость признака y в данной серии экспериментов; $\sigma_i^2(y)$ – составляющая полной дисперсии, обусловленная изменчивостью i-го фактора или взаимодействия факторов; α_i – коэффициент, характеризующий объем наблюдений; $\sigma_{ош}^2(y)$ – дисперсия, характеризующая ошибку эксперимента и действие неучтенных факторов

Для решения вопроса о том, существенно ли влияние данного фактора на признак, используется критерий Фишера:

$$F_i = \frac{\sigma_i^2(y)}{\sigma_{ош}^2(y)} > F_\alpha(f_i; f_{ош}), \tag{2.2}$$

где α – уровень значимости, характеризующий вероятность, с которой определяется существенность исследуемого фактора; f_i – число степеней свободы дисперсии $\sigma_i^2(y)$, характеризующее количество информации, использованное для ее вычисления; $f_{ош}$ – число степеней свободы дисперсии $\sigma_{ош}^2(y)$, характеризующее количество информации, использованное для ее определения, т.е. значимость оценивается на фоне шумового поля, создаваемого действием неучтенных факторов и ошибки эксперимента.

Модель однофакторного дисперсионного анализа

$$y_{ik} = \mu + A_i + \varepsilon_{ik}, \tag{2.3}$$

где y_{ik} – значение признака y, когда фактор A находится на i-м уровне при k-м повторении опыта; μ – математическое ожидание признака y, оценка которого вычисляется по результатам всех наблюдений; A_i – влияние на изменчивость признака фактора A, когда он находится на i-м уровне (эффект фактора A); ε_{ik} ошибка эксперимента и действие неучтенных факторов, когда фактор A находится на i-м уровне при k-м повторении опыта.

Для проведения анализа необходимо фактору A придавать различные значения, т. е. исследовать на различных уровнях i, $i = 2, 3, \ldots, a$; $a_{min} = 2$; k – число наблюдений на каждом уровне, $k = 3, 4, \ldots, n$; $k_{min} = 3$. В случае однофакторного дисперсионного анализа общее число наблюдений $N = a \cdot n$.

Проведя опыты, можно найти общую среднюю $\bar{y}$ и средние значения по уровням наблюдений $\bar{y}_i$ и определить суммарные квадраты.

$Q = \sum_{i,k}(y_{ik} - \bar{y})^2$ – полный суммарный квадрат, характеризующий полную изменчивость признака.

$Q_1 = n\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_i - \bar{y})^2$ – суммарный квадрат, характеризующий отклонения групповых средних от общей средней, он определяет изменчивость признака от действия фактора A и межгрупповой ошибки эксперимента, число степеней свободы $f_1 = a - 1$.

$Q_2 = \sum_{i,k}(y_{ik} - \bar{y}_i)^2$ – суммарный квадрат, характеризующий ошибку эксперимента и действие неучтенных факторов внутри групп наблюдений.

Поскольку опыты производятся в однородных условиях (это предпосылка проведения дисперсионного анализа), то межгрупповая дисперсия ошибки эксперимента и действия неучтенных факторов и общая дисперсия ошибки эксперимента и действия неучтенных факторов однородны. По сути, это одна и та же дисперсия, оценки которой вычисляются по разному объему выборок из одной и той же совокупности экспериментальных данных, поэтому ее оценка $\tilde{\sigma}^2_{ош}(y) = \dfrac{Q_2}{f_2}$, где f_2 – число степеней свободы, $f_2 = N - a$. Учтя это и определив оценку дисперсии $\tilde{\sigma}^2_1(y) = \dfrac{Q_1}{f_1}$, можно записать

$$\tilde{\sigma}^2_1(y) = n\tilde{\sigma}^2_A(y) + \tilde{\sigma}^2_{ош}(y),$$

откуда

$$\tilde{\sigma}^2_A(y)=\frac{1}{n}[\tilde{\sigma}^2_1(y)-\tilde{\sigma}^2_{ош}(y)] \text{ и } \tilde{\sigma}^2_n(y)=\tilde{\sigma}^2_A(y)+\tilde{\sigma}^2_{ош}(y). \qquad (2.4)$$

Вклад фактора в изменчивость признака вычисляется по формуле

$$B_{вкл} = [S^2{}_A(y)/S^2{}_n(y)]\cdot 100\ \%, \qquad (2.5)$$

где $S^2{}_A(y)$, $S^2{}_n(y)$ – соответственно оценка дисперсии, характеризующая вклад фактора в изменчивость признака, и полная дисперсия, характеризующая полную изменчивость признака.

Расчетные зависимости для рационального подсчета численных значений суммарных квадратов имеют вид

$$Q=\sum_{i,k} y^2_{ik}-\frac{1}{N}(\sum_{i,k} y_{ik})^2; \quad Q_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}(\sum_{k=1}^{n} y_{ik})^2-\frac{1}{N}(\sum_{ik} y_{ik})^2;$$

$$Q_2=\sum_{i,k} y^2_{ik}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}(\sum_{k=1}^{n} y_{ik})^2. \qquad (2.6)$$

Пример. По данным источника [13] исследовать влияние местонахождения пункта продаж (Минск, Москва) на средние цены (тыс. долл США) легковых подержанных автомобилей марок БМВ, «Опель-Астра», «VW–Гольф», «Форд-Мондео» в ноябре 2000 г., имеющих в первом приближении одинаковое техническое состояние.

В табл. 13 приведены цены на автомобили в Минске и Москве, а также необходимые расчетные параметры.

Таблица 13

Вычисление показателей
для расчета влияния местонахождения пункта продаж
на средние цены подержанных автомобилей

№ п/п	Местонахождение пункта продаж		Суммы
	Минск	Москва	
1	2	3	4
1	5,0	6,8	
2	3,1	4,1	
3	2,3	5,0	
4	4,1	5,1	
5	5,3	7,2	
6	2,8	4,2	

Окончание табл. 13

1	2	3	4
7	3,4	5,4	
8	3,8	5,4	
$\tilde{m}_i$	3,7	5,4	
$\tilde{D}_j$	1,1	1,2	
Σy	29,8	43,2	$\sum_{i,k} y_{i,k} = 73$
Σy^2	118,6	241,9	$\sum_{i,k} y_{i,k}^2 = 360,5$
$(\Sigma y)^2$	888,0	1866,2	$\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{k=1}^{n} y_{i.k}\right)^2 = 2754,2$

Решение. Приведенные значения параметров вычисляют по следующим формулам:

$$\tilde{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^{8} y_i}{n}; \qquad \tilde{m}_1 = \frac{5+3{,}1+\ldots+3{,}8}{8} = 3{,}7; \qquad \tilde{m}_2 = \frac{6{,}8+4{,}1+\ldots+5{,}4}{8} = 5{,}4.$$

$$\tilde{D}_j = \frac{\sum_{i=1}^{8}(y_i - \tilde{m}_j)^2}{n-1}; \qquad \tilde{D}_1 = \frac{(5{,}0-3{,}7)^2+\ldots+(3{,}8-3{,}7)^2}{8-1} = 1{,}1;$$

$$\tilde{D}_2 = \frac{(6{,}8-5{,}4)^2+\ldots+(5{,}4-5{,}4)^2}{8-1} = 1{,}2.$$

Вначале проверяют однородность оценок дисперсий по уровням наблюдений. Вычисляют значение F-статистики:

$$F = \frac{1{,}2}{1{,}1} = 1{,}091 < F_{кр}(0{,}05;7;7) = 3{,}7870\,.$$

Следовательно, оценки дисперсий однородны, дисперсионный анализ можно проводить, поскольку с достаточным уровнем доверительной вероятности неучтенные факторы и неизбежная ошибка эксперимента существенно не повлияли на изменчивость признака.

Значения сумм для первого столбца данных (Минск):

$$\Sigma y = 5{,}0 + 3{,}1 + \ldots + 3{,}8 = 29{,}8;$$
$$\Sigma y^2 = 5{,}0^2 + 3{,}1^2 + \ldots + 3{,}8^2 = 118{,}6;$$
$$(\Sigma y)^2 = 29{,}8^2 = 888{,}0.$$

Для второго столбца (Москва):

$$\Sigma y = 6{,}8 + 4{,}1 + \ldots + 5{,}4 = 43{,}2;$$
$$\Sigma y^2 = 6{,}8^2 + 4{,}1^2 + \ldots + 5{,}4^2 = 241{,}9;$$
$$(\Sigma y)^2 = 43{,}2^2 = 1866{,}2.$$

Для третьего столбца (суммы):

$$\sum_{i,k} y_{i,k} = 29{,}8 + 43{,}2 = 73;$$
$$\sum_{i,k} y_{i,k}^2 = 118{,}6 + 241{,}9 = 360{,}5;$$
$$\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{k=1}^{n} y_{ik}\right)^2 = 888{,}0 + 1866{,}2 = 2754{,}2.$$

Вычисляют значения суммарных квадратов:

$$Q = 360{,}5 - \frac{73^2}{16} = 27{,}44;\ Q_1 = \frac{2754{,}2}{8} - \frac{73^2}{16} = 11{,}21;\ Q_2 = 360{,}5 - \frac{2754{,}2}{8} = 16{,}23.$$

Оценка дисперсии, характеризующая изменение признака от воздействия фактора (местонахождения пункта продаж) и внутригрупповой ошибки эксперимента и действия неучтенных факторов при числе степеней свободы $f_1 = a - 1 = 2 - 1 = 1$

$$S_1^2(y) = \frac{Q_1}{f_1} = \frac{11{,}21}{1} = 11{,}21.$$

Оценка дисперсии, характеризующей воздействие на признак ошибки эксперимента и действия неучтенных факторов при числе степеней свободы $f_2 = N - a = 16 - 2 = 14$

$$S_{ош}^2(y) = \frac{Q_2}{f_2} = \frac{16{,}23}{14} = 1{,}16.$$

Значимость фактора (местонахождения пункта продаж) оценивается F-критерием при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числах степеней свободы $f_1 = 1$ и $f_2 = 14$ (табл. 10 приложения), проверяется нулевая гипотеза H_0: $S^2{}_1(y) > S^2{}_2(y)$ при конкурирующей H_1: $S^2{}_1(y) \le S^2{}_2(y)$:

$$F = \frac{S_1^2(y)}{S_2^2(y)} = \frac{11{,}21}{1{,}16} = 9{,}66 > F_{кр}(0{,}05;1;14) = 4{,}60.$$

Поскольку значение F-статистики превышает критическое значение $F_{кр}$, гипотеза о существенности фактора не отвергается.

Значение оценки дисперсии $S^2_A(y)$:

$$S_A^2(y) = \frac{1}{8}(11{,}21 - 1{,}16) = 1{,}26.$$

Величина оценки полной дисперсии

$$S^2_n(y) = 1{,}26 + 1{,}16 = 2{,}42.$$

Вклад фактора – местонахождения пункта продаж автомобилей – в формирование цены на подержанный автомобиль

$$B_{вкл} = (1{,}26 / 2{,}42)100\% = 52\ \%.$$

Следовательно, цена на подержанный автомобиль на 52% зависит от места нахождения пункта продаж.

2.2. Влияние квалификации специалистов на продолжительность технического обслуживания машин

Пример. Исследовать влияние квалификации специалистов, привлекаемых к проведению технических обслуживаний (ТО) машин, на продолжительность ТО. Специалисты разбиты на четыре группы (четыре уровня фактора *A*) в зависимости от их квалификации, оцениваемой стажем работы по специальности. В первую группу вошли слесари, имеющие стаж работы по специальности – не менее 8 лет, во вторую – не менее 12 лет, в третью – не менее 15 лет, в четвертую – не менее 20 лет. Из 20 автомобилей ЗИЛ-4314 (N = 20), имеющих приблизительно одинаковое техническое состояние, для каждого из специалистов случайным образом выбирается один и подается на таким же образом случайно выбранное рабочее место, причем все рабочие места имеют одинаковое техническое оснащение (эксперименты, поставленные в условиях, обеспечивающих случайный характер их проведения, называются рандомизированными). Результаты эксперимента приведены в табл. 14.

Таблица 14

Продолжительность проведения ТО по группам специалистов, мин

№ машины	Группа специалистов			
	1	2	3	4
1	56	60	45	42
2	55	61	46	39
3	62	52	45	45
4	59	55	39	43
5	60	56	43	41

Решение. Для упрощения вычислений при ручном счете вычитается из всех данных 50 и формируется табл. 15.

Таблица 15

Расчетные значения параметров дисперсионного анализа

№ машины	Группа специалистов				Суммы
	1	2	3	4	
1	6	10	–5	–8	
2	5	11	–4	–11	
3	12	2	–5	–5	
4	9	5	–11	–7	
5	10	6	–7	–9	
$\sum y_{ik}$	42	34	–32	–40	4
$\sum y_{ik}^2$	386	286	236	340	1248
$\left(\sum y_{ik}\right)^2$	1764	1156	1024	1600	5544
$S_i^2(y)$	8,3	13,7	7,8	5,0	

Суммы $\sum y_{ik}$ рассчитываются следующим образом: например, для второго столбца по первой группе специалистов 6 + 5 + +12 + 9 + 10 = 42.

Суммирование полученных значений по горизонтали дает следующий результат:

$$42 + 34 + (-32) + (-40) = 4.$$

Суммы $\sum y_{ik}^2$ рассчитываются так: например, для второго столбца по первой группе специалистов

$$6^2 + 5^2 + 12^2 + 9^2 + 10^2 = 386.$$

Суммирование полученных значений по горизонтали дает результат

$$386 + 286 + 236 + 340 = 1248,$$

который записывается в шестой столбец.

Суммы $\left(\sum y_{ik}\right)^2$ получают, возводя в квадрат соответствующие суммы $\sum y_{ik}$ по группам специалистов:

$$42^2 = 1764;\ 34^2 = 1156;\ (-32)^2 = 1024;\ (-40)^2 = 1600.$$

Суммируя вычисленные значения по горизонтали, получают сумму шестого столбца:

$$1764 + 1156 + 1024 + 1600 = 5544.$$

Проверяют однородность оценок дисперсий в соответствии с критерием Кокрена, вычисляют значение G-статистики:

$$G = 13{,}7/(8{,}3 + 13{,}7 + 7{,}8 + 5{,}0) = 0{,}3940 < G_{кр}\,(0{,}05;\ 4;\ 4) = 0{,}6287.$$

Гипотеза об однородности оценок дисперсий не отвергается, предпосылки дисперсионного анализа не нарушаются, т. е. оценки внутригрупповой и общей дисперсии однородны.

Оценки суммарных квадратов, характеризующие общую дисперсию признака, дисперсию признака от воздействия фактора A, дисперсию признака от воздействия неучтенных факторов и ошибки эксперимента:

$$Q = 1248 - (4^2 / 20) = 1247{,}2;\ Q_1 = (5544 / 5) - (4^2 / 20) = 1108;$$
$$Q_2 = 1248 - (5544 / 5) = 139{,}2.$$

Оценки дисперсий, соответствующие Q_1 и Q_2 при числах степеней свободы $f_1 = a - 1 = 4 - 1 = 3$; $f_2 = N - a = 20 - 4 = 16$.

$$S_1^2(y) = \frac{1108}{3} = 369{,}3; \quad S_{ош}^2(y) = \frac{139{,}2}{16} = 8{,}7\ .$$

Существенность фактора A проверяют с помощью F-критерия:

$$F = \frac{S_1^2(y)}{S_{ош}^2(y)} = \frac{369{,}3}{8{,}7} = 42{,}4 > F(0{,}05;3;16) = 3{,}24.$$

Значит, влияние квалификации на длительность ТО автомобилей существенно.

Чтобы количественно оценить вклад фактора A (квалификации специалистов) в изменчивость длительности ТО, находят оценки дисперсии вклада фактора A и полной дисперсии:

$$S_A^2(y) = \frac{1}{5}(369{,}3 - 8{,}7) = 72{,}1; \quad S_П^2(y) = 72{,}1 + 8{,}7 = 80{,}8.$$

Вклад фактора A – квалификации специалистов в изменчивость продолжительности ТО

$$B_{вкл} = (72{,}1 / 80{,}8)\ 100\ \% = 89{,}3\ \%.$$

Следовательно, гипотеза о значимости влияния квалификации специалистов на продолжительность технических обслуживаний автомобилей ЗИЛ-4314 не отвергается и продолжительность проведения ТО при данных условиях оснащенности рабочих мест на 89,3 % определяется квалификацией специалистов.

2.3. Оценка существенности влияния двух факторов и их взаимодействия на показатели маркетинга

Модель двухфакторного дисперсионного анализа имеет вид

$$y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + A_i B_j + \varepsilon_{ij}, \tag{2.7}$$

где y_{ijk} – значение признака y, когда фактор A находится на i-м уровне, фактор B – на j-м уровне при k-м повторении опыта; μ – среднее значение признака по результатам всех опытов; A_i – влияние на изменчивость признака фактора A, когда он находится на i-м уровне (эффект фактора A); B_j – эффект фактора B; $A_i B_j$ – эффект взаимодействия факторов A и B, когда фактор A находится на i-м уровне, а фактор B – на j-м уровне; ε_{ijk} – эффект ошибки эксперимента и действия неучтенных факторов.

В случае двухфакторного дисперсионного анализа полная дисперсия, обуславливающая изменчивость признака в серии опытов, дифференцируется на составляющие ее дисперсии, обусловленные варьированием независимых случайных переменных (факторов), ошибкой эксперимента и действием неучтенных факторов.

Пример 1. Оценить существенность влияния двух факторов (A – местонахождение пункта продаж автомобилей, B – время, месяц, год) на формирование цены подержанных легковых автомобилей. Данные приведены в табл. 16.

Решение. Вычисляют оценки математических ожиданий и дисперсий по группам наблюдений:

$$m^*_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{n}; \qquad D^*_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (y_{ijk} - m^*_{ij})^2}{n-1}. \tag{2.8}$$

Оценка математического ожидания признака – цены подержанного легкового автомобиля, когда факторы A и B находятся на первом уровне (первый уровень фактора A – местонахождение пункта продаж – Минск, первый уровень фактора B – ноябрь 2000 г.)

$$m^*_{11} = \frac{5{,}0 + \ldots + 4{,}1}{4} = 3{,}625.$$

Оценка дисперсии $D^*_{11} = \dfrac{(5{,}0 - 3{,}625)^2 + \ldots + (4{,}1 - 3{,}625)^2}{3} = 1{,}39.$

Оценка математического ожидания цены подержанного легкового автомобиля, когда местонахождение пункта продаж – Минск (первый уровень фактора *A*), а событие происходит в июле 2001 г. (второй уровень фактора *B*)

$$m^*_{12} = \frac{6{,}8 + \ldots + 5{,}1}{4} = 5{,}25.$$

Оценка дисперсии цены $D^*_{12} = \dfrac{(6{,}8 - 5{,}25)^2 + \ldots + (5{,}1 - 5{,}25)^2}{3} = 1{,}27.$

Оценка математического ожидания цены, когда местонахождения пункта продаж – Москва (второй уровень фактора *A*), а распродажа осуществлялась в ноябре 2000 г. (первый уровень фактора *B*)

$$m^*_{21} = \frac{5{,}3 + \ldots + 3{,}8}{4} = 3{,}825.$$

Оценка дисперсии цены $D^*_{21} = \dfrac{(5{,}3 - 3{,}825)^2 + \ldots + (3{,}8 - 3{,}825)^2}{3} = 1{,}14.$

Оценка математического ожидания цены, когда факторы *A* и *B* находятся на втором уровне (пункт продажи – Москва, событие совершалось в июле 2001 г.)

$$m^*_{22} = \frac{7{,}2 + \ldots + 5{,}4}{4} = 5{,}55.$$

Оценка дисперсии $D^*_{22} = \dfrac{(7{,}2 - 5{,}55)^2 + \ldots + (5{,}4 - 5{,}55)^2}{3} = 1{,}53.$

Проверка однородности оценок дисперсий осуществляется с помощью критерия Кокрена, вычисляется значение *G*-статистики:

$$G = \frac{D^*_{\max}}{D^*_{11} + D^*_{12} + D^*_{21} + D^*_{22}} = \frac{1{,}53}{1{,}39 + 1{,}27 + 1{,}14 + 1{,}53} = 0{,}287.$$

Поскольку при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, четырех независимых оценках дисперсий ($k = 4$) и равных числах степеней свободы оценок дисперсий $f = 3$ критическое значение $G_{кр}(0{,}05;4;3) = 0{,}7814 > G_{набл.} = 0{,}287$ (табл. 11 приложения), то гипотеза об однородности оценок дисперсий не отвергается. Дисперсионный анализ можно проводить, так как с достаточно высоким уровнем доверительной вероятности можно предположить, что неучтенные факторы и ошибка эксперимента существенно не повлияли на цену подержанных легковых автомобилей ни в Минске, ни в Москве, ни осенью, ни летом.

Таблица 16

Влияние фактора *A* – местонахождения пункта продаж и фактора *B* – времени года на цены подержанных легковых автомобилей

Уровень, сумма фактора *B*	Уровень фактора *A*		$\sum_j y$	$\left(\sum_j y\right)^2$	$\sum_j y^2$
	1	2			
1	5,0	6,8			
	3,1	4,1			
	2,3	5,0			
	4,1	5,1			
$\Sigma_1 y$	14,5	21	35,5	$35{,}5^2 = 1260{,}25$	
$(\Sigma_1 y)^2$	210,25	441			170,77
2	5,3	7,2			
	2,8	4,2			
	3,4	5,4			
	3,8	5,4			
$\Sigma_2 y$	15,3	22,2	37,5	$37{,}5^2 = 1406{,}25$	
$(\Sigma_2 y)^2$	234,09	492,84			189,73
$\sum_i y$	29,8	43,2	73,0		
$\left(\sum_i y\right)^2$	888,04	1866,24		<u>2666,50</u> 2754,28	
$\sum_i y^2$	118,64	241,86			360,5
	m^*_{11}=3,625 D^*_{11}=1,39	M^*_{12}= 5,25 D^*_{12}= 1,27			
	m^*_{21}=3,825 D^*_{21}=1,14	M^*_{22}= 5,55 D^*_{22}= 1,53			

Вычисление сумм, представленных в табл. 16, производилось следующим образом.

Суммы для первого уровня фактора *B*:

$$\Sigma_{11} y = 5{,}0 + \ldots + 4{,}1 = 14{,}5;\quad \Sigma_{12} y = 6{,}8 + \ldots + 5{,}1 = 21;$$

$$\sum_j {}_1 y = 14{,}5 + 21 = 35{,}5;\quad \left(\sum_j {}_1 y\right)^2 = 35{,}5^2 = 1260{,}25;$$

$$(\Sigma_{11}y)^2 = 14{,}5^2 = 210{,}25;\ (\Sigma_{12}y)^2 = 21^2 = 441;$$

$$\sum_j {}_1 y^2 = 5{,}0^2 + 3{,}1^2 + \ldots + 4{,}1^2 + 6{,}8^2 + \ldots + 5{,}1^2 = 170{,}77.$$

Суммы для второго уровня фактора B:

$$\Sigma_{21}\, y = 5{,}3 + \ldots + 3{,}8 = 15{,}3;\ \Sigma_{22}\, y = 7{,}2 + \ldots + 5{,}4 = 22{,}2;$$

$$\sum_j {}_2 y = 15{,}3 + 22{,}2 = 37{,}5;\ \left(\sum_j {}_2 y\right)^2 = 37{,}5^2 = 1406{,}25;$$

$$(\Sigma_{21}\, y)^2 = 15{,}3^2 = 234{,}09;\ (\Sigma_{22}\, y)^2 = 22{,}2^2 = 492{,}84;$$

$$\sum_j {}_2 y^2 = 5{,}3^2 + \ldots + 3{,}8^2 + 7{,}2^2 + \ldots + 5{,}4^2 = 189{,}73;\ \sum_j y^2 = 170{,}77 + 189{,}73 = 360{,}5.$$

Далее рассчитаем суммы по уровням фактора A:

$$\sum_i {}_1 y = 14{,}5 + 15{,}3 = 29{,}8;\ \sum_i {}_2 y = 21 + 22{,}2 = 43{,}2.$$

Сделаем промежуточную проверку

$$\sum_i y = \sum_j y, \text{ т. е. } 29{,}8 + 43{,}2 = 35{,}5 + 37{,}5 = 73.$$

$$\left(\sum_i {}_1 y\right)^2 = 29{,}8^2 = 888{,}04;\ \left(\sum_i {}_2 y\right)^2 = 43{,}2^2 = 1866{,}24;$$

$$\left(\sum_i y\right)^2 = 888{,}04 + 1866{,}24 = 2754{,}28;\left(\sum_j y\right)^2 = 1260{,}25 + 1406{,}25 = 2666{,}50;$$

$$\sum_i {}_1 y^2 = 5{,}0^2 + \ldots + 4{,}1^2 + \ldots + 5{,}3^2 + \ldots 3{,}8^2 = 118{,}64;$$

$$\sum_i {}_2 y^2 = 6{,}8^2 + \ldots + 5{,}1^2 + \ldots + 7{,}2^2 + \ldots + 5{,}4^2 = 241{,}86;$$

$$\sum_i y^2 = 118{,}64 + 241{,}86 = 360{,}5; \sum_i y^2 = 118{,}64 + 241{,}86 = 360{,}5.$$

Последняя сумма дает проверку правильности вычислений, так как должно иметь место равенство

$$\sum_i y^2 = \sum_j y^2 = 360{,}5.$$

Считаем суммы, входящие в формулы для определения суммарных квадратов:

$$\left(\sum_{ijk} y_{ijk}\right)^2 = \left(\sum_i {}_1 y + \sum_i {}_2 y\right)^2 = (29{,}7 + 43{,}2)^2 = 73^2;\ \sum_{ijk} y_{ijk}^2 = \sum_i y^2 = \sum_j y^2 = 360{,}5;$$

$$\sum_j y_{\Sigma j}^2 = \left(\sum_j {}_1 y\right)^2 + \left(\sum_j {}_2 y\right)^2 = (35{,}5^2 + 37{,}5^2) = 2666{,}5;$$

$$\sum_i y_{\Sigma i}^2 = \left(\sum_i {}_1 y\right)^2 + \left(\sum_i {}_2 y\right)^2 = (29{,}8^2 + 43{,}2^2) = 2754{,}28;$$

$$\left(\sum_{ij} y_{\Sigma ij}\right)^2 = \left(\sum {}_{11} y\right) + \left(\sum {}_{12} y\right) + \left(\sum {}_{21} y\right) + \left(\sum {}_{22} y\right) = 210{,}25 + 441 + 234{,}09 + 492{,}84.$$

Полный суммарный квадрат

$$Q_o = \sum_{ijk} y_{ijk}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{ijk} y_{ijk}\right)^2 = 360{,}5 - \frac{1}{16}(73)^2 = 27{,}44.$$

Суммарный квадрат, характеризующий эффект фактора B – времени года,

$$Q_1 = \frac{1}{nb}\sum_j y_{\Sigma j}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{ijk} y_{ijk}\right)^2 = \frac{1}{4\cdot 2}(35{,}5^2 + 37{,}5^2) - \frac{1}{16}73^2 = 0{,}25.$$

Суммарный квадрат, характеризующий эффект фактора A – местонахождения пункта продаж,

$$Q_2 = \frac{1}{na}\sum_i y_{\Sigma i}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{ijk} y_{ijk}\right)^2 = \frac{1}{4\cdot 2}(29{,}8^2 + 43{,}2^2) - \frac{1}{16}73^2 = 11{,}22.$$

Суммарный квадрат эффекта взаимодействия

$$Q_3 = \frac{1}{n}\left(\sum_{ij} y_{\Sigma ij}\right)^2 - \frac{1}{nb}\sum_j y_{\Sigma j}^2 - \frac{1}{na}\sum_i y_{\Sigma i}^2 + \frac{1}{N}\left(\sum_{ijk} y_{ijk}\right)^2;$$

$$Q_3 = \frac{210{,}25 + 234{,}09 + 441 + 492{,}84}{4} - 333{,}31 - 344{,}285 + 333{,}06 = 0{,}01.$$

Суммарный квадрат, характеризующий ошибку эксперимента и действие неучтенных факторов,

$$Q_4 = \sum_{ijk} y_{ijk}^2 - \frac{1}{n}\sum_{ij} y_{\Sigma ij}^2;$$

$$Q_4 = 360{,}5 - \frac{210{,}25 + 234{,}09 + 441 + 492{,}84}{4} = 360{,}5 - 344{,}545 = 15{,}955.$$

Оценки дисперсий, соответствующие суммарным квадратам,

$$S_y^2 = Q / f; \tag{2.9}$$

где f – число степеней свободы дисперсии.

При общем числе наблюдений

$$N = abn = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16,$$

здесь a – число уровней фактора A, $a = 2$; b – число уровней фактора B, $b = 2$; n – число повторений опытов на каждом уровне, $n = 4$.

$$f_0 = N - 1 = 16 - 1 = 15; \quad f_1 = b - 1 = 2 - 1 = 1;$$
$$f_2 = a - 1 = 2 - 1 = 1; \quad f_3 = (b-1)(a-1) = (2-1)(2-1) = 1;$$
$$f_4 = ab(n-1) = 2 \cdot 2(4-1) = 12.$$

Оценки полной дисперсии и дисперсий, характеризующих изменчивость признака по всем наблюдениям,

$$S_{oy}^2 = \frac{Q_o}{f_o} = \frac{27{,}44}{15} = 1{,}83; \quad S_{1y}^2 = \frac{Q_1}{f_1} = \frac{0{,}25}{1} = 0{,}25; \quad S_{2y}^2 = \frac{Q_2}{f_2} = \frac{11{,}22}{1} = 11{,}22;$$
$$S_{3y}^2 = \frac{Q_3}{f_3} = \frac{0{,}01}{1} = 0{,}01; \quad S_{4y}^2 = \frac{Q_4}{f_4} = \frac{15{,}955}{12} = 1{,}33.$$

Существенность оценок дисперсий проверяют на фоне ошибки эксперимента и действия неучтенных факторов при нулевой гипотезе H_0: $S^2(y) > S^2{}_4(y)$ и конкурирующей H_1: $S^2 \le S^2{}_4(y)$, используя критерий Фишера:

$$F_1 = \frac{S_1^2(y)}{S_4^2(y)} = \frac{0{,}25}{1{,}33} = 0{,}188 < F_{кр}(1;12;0{,}05) = 4{,}75,$$

т. е. нуль-гипотезу отвергают при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числах степеней свободы $f_1 = 1$ и $f_4 = 12$, принимается конкурирующая гипотеза (фактор времени года незначим).

$$F_2 = \frac{S_2^2(y)}{S_4^2(y)} = \frac{11{,}22}{1{,}33} = 8{,}44 > F_{кр}(1;12;0{,}05) = 4{,}75;$$

т. е. фактор местонахождения пункта продажи автомобилей существенно влияет на цену.

$$F_3 = \frac{S_3^2(y)}{S_4^2(y)} = \frac{0{,}01}{1{,}33} = 0{,}01 < F_{кр}(1;12;0;05) = 4{,}75;$$

т. е. эффект взаимодействия факторов (местонахождения пункта продаж автомобилей и времени года) незначим.

Пример 2. Оценить наличие динамики роста продаж колбасных изделий (фактор A) за счет совершенствования этой сферы маркетинга и влияние разновидности колбасы (фактор B) на объем продаж (тыс. кг) в 2000 г. (табл. 17).

Уровни фактора A: 1. Январь, февраль, март; 2. Октябрь, ноябрь, декабрь; уровни фактора B: 1. Вареные колбасы; 2. Сардельки. Округленные данные взяты из источника [18].

Таблица 17

Исходные данные и расчет показателей для определения существенности факторов и их взаимодействий

Уровень фактора B	Уровень фактора A		$\sum_j y$	$\left(\sum_j y\right)^2$	$\sum_j y^2$
	1	2			
1	40,5	67,6			
	40,2	67,3			
	43,6	73,8			
$\sum_1 y$	124,3	208,7	333	110889	
$(\sum_1 y)^2$	15450,5	43555,7			19702,7
2	5,6	10,0			
	6,1	10,6			
	7,0	10,1			
$\sum_2 y$	18,7	30,7	49,4	2440,4	
$(\sum_2 y)^2$	349,7	942,5			432,0
$\sum_i y$	143,0	239,4	382,4		
$\left(\sum_i y\right)^2$	20449	57312,4		$\frac{113329,4}{77761,4}$	
$\sum_i y^2$	5274,8	14859,9			20134,7

Решение. Выполним проверку однородности оценок дисперсий по уровням факторов с помощью критерия Кокрена, для этого определим оценки параметров для соответствующих выборок по табл. 18.

Таблица 18

Параметры выборок по уровням факторов

Параметр	A_1B_1	A_1B_2	A_2B_1	A_2B_2	Сумма
$m^*_i\,(y)$	41,4	6,2	69,6	10,2	–
$D^*_i\,(y)$	3,54	0,503	13,46	0,103	17,61

Рассчитаем суммы для первого уровня фактора B:

$$\Sigma_{11}y = 40{,}5 + 40{,}2 + 43{,}6 = 124{,}3;\quad \Sigma_{12}y = 67{,}6 + 67{,}3 + 73{,}8 = 208{,}7;$$
$$(\Sigma_{11}y)^2 = 124{,}3^2 = 15450{,}5;\quad (\Sigma_{12}y)^2 = 208{,}7^2 = 43555{,}7;$$

$$\sum_j {}_1y = 124{,}3 + 208{,}7 = 333; \quad \left(\sum_j {}_1y\right)^2 = 333^2 = 110889;$$

$$\sum_j {}_1y^2 = 40{,}5^2 + 40{,}2^2 + 43{,}6^2 + 67{,}6^2 + 67{,}3^2 + 73{,}8^2 = 19702{,}7.$$

Рассчитаем суммы для второго уровня фактора B:

$$\Sigma_{21}y = 5{,}6 + 6{,}1 + 7{,}0 = 18{,}7; \quad \Sigma_{22}y = 10{,}0 + 10{,}6 + 10{,}1 = 30{,}7;$$

$$(\Sigma_{21}y)^2 = 18{,}7^2 = 349{,}7; \quad (\Sigma_{22}y)^2 = 30{,}7^2 = 942{,}5;$$

$$\sum_j {}_2y = 18{,}7 + 30{,}7 = 49{,}4; \quad \left(\sum_j {}_2y\right)^2 = 49{,}4^2 = 2440{,}4;$$

$$\sum_j {}_2y^2 = 5{,}6^2 + 6{,}1^2 + 7{,}0^2 + 10{,}0^2 + 10{,}6^2 + 10{,}1^2 = 432;$$

Рассчитаем суммы по уровням фактора A:

$$\sum_i {}_1y = 124{,}3 + 18{,}7 = 143{,}0; \sum_i {}_2y = 208{,}7 + 30{,}7 = 239{,}4; \sum_j y = 143{,}0 + 239{,}4 = 382{,}4;$$

$$\left(\sum_i {}_1y\right)^2 = 143^2 = 20449{,}0; \quad \left(\sum_i {}_2y\right)^2 = 239{,}4^2 = 57312{,}4;$$

$$\left(\sum_j y\right)^2 = 110889{,}0 + 2440{,}4 = 113329{,}4; \quad \left(\sum_i y\right)^2 = 20449 + 57312{,}4 = 77761{,}4;$$

$$\sum_i {}_1y^2 = 40{,}5^2 + \ldots + 43{,}6^2 + 5{,}6^2 + \ldots + 7{,}0^2 = 5274{,}8;$$

$$\sum_i {}_2y^2 = 67{,}6^2 + \ldots + 73{,}8^2 + 10{,}0^2 + \ldots + 10{,}1^2 = 14859{,}9;$$

$$\sum_i y^2 = \sum_j y^2 = 20134{,}7; \quad 5274{,}8 + 14859{,}9 = 19702{,}7 + 432{,}0.$$

По формуле (1.20) вычисляем значение G-статистики:

$$G_{набл} = 13{,}46 / (3{,}54 + 0{,}503 + 13{,}46 + 0{,}103) = 0{,}764 < G_{кр}\,(0{,}05;\,4;\,2) = 0{,}7679.$$

Поскольку оно меньше критического при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, числе исследуемых оценок дисперсий, равном четырем, числах степеней свободы каждой из оценок дисперсий, равных двум, гипотеза об однородности оценок не отвергается [3, табл. 3.4 б]. Дисперсионный анализ можно проводить, поскольку существенного влияния на признак неучитываемые факторы не оказывали.

Рассчитаем суммы, входящие в формулы для определения суммарных квадратов:

$$(\sum_{i,j,k} y_{i,j,k})^2 = (\sum_i {}_1y + \sum_i {}_2y)^2 = (143{,}0 + 239{,}4)^2 = 382{,}4^2 = 146229{,}8;$$

$$\sum_{i,j,k} y_{i,j,k}^2 = \sum_i y^2 = \sum_j y^2 = 20134{,}7;\ \sum_j y_{\Sigma j}^2 = (\sum_j {}_1y)^2 + (\sum_j {}_2y)^2 = 333^2 + 49{,}4^2 =$$

$$= 113329{,}4;\ \sum_i y_{\Sigma i}^2 = (\sum_i {}_1y)^2 + (\sum_i {}_2y)^2 = 143^2 + 239{,}4^2 = 77761{,}4;$$

$$(\sum_{i,j} y_{\Sigma i,j})^2 = (\sum {}_{11}y)^2 + (\sum {}_{12}y)^2 + (\sum {}_{21}y)^2 + (\sum {}_{22}y)^2 = 15450{,}5 + 43555{,}7 +$$

$$+ 349{,}7 + 942{,}5 = 60298{,}4;$$

Полные суммарные квадраты, характеризующие отклонение признака от общей средней, отклонение признака от воздействия фактора *A* – совершенствования системы маркетинга, отклонение признака от воздействия фактора *B* – разновидности колбасной продукции, изменчивость признака от взаимодействия факторов *A* и *B*, а также суммарный квадрат, характеризующий ошибку эксперимента и действие неучтенных факторов будут иметь следующие значения:

$$Q_0 = 20134{,}7 - 146229{,}8 / 12 = 7948{,}9;$$
$$Q_1 = (113329{,}4 / 3\cdot 2) - 146229{,}8 / 12 = 6702{,}4;$$
$$Q_2 = (77761{,}4 / 3\cdot 2) - 146229{,}8 / 12 = 774{,}4;$$
$$Q_3 = (60298{,}4 / 3) - (113329{,}4 / 3\cdot 2) - (77761{,}4 / 3\cdot 2) + (146229{,}8 / 12) = 436{,}9;$$
$$Q_4 = 20134{,}7 - 60298{,}4 / 3 = 35{,}2.$$

Сделаем проверку: $Q_0 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$.

$$7948{,}9 = 6702{,}4 + 774{,}4 + 436{,}9 + 35{,}2.$$

Числа степеней свободы оценок дисперсий имеют следующие значения:

$$f_0 = N - 1 = 12 - 1 = 11;\ f_1 = b - 1 = 2 - 1 = 1;\ f_2 = a - 1 = 2 - 1 = 1;$$
$$f_3 = (a - 1)(b - 1) = (2 - 1)(2 - 1) = 1;\ f_4 = ab(n - 1) = 2\cdot 2(3 - 1) = 8.$$

Оценки дисперсий соответственно полной, характеризующей отклонение признака от воздействия фактора *A* – совершенствования системы маркетинга; характеризующей отклонение признака от воздействия фактора *B* – разновидности колбасной продукции; характеризующей изменчивость признака от взаимодействия факторов *A* и *B*; характеризующей ошибку эксперимента и действие неучтенных факторов следующие:

$$S_0^2(y) = \frac{7948{,}9}{11} = 722{,}6;\quad S_1^2(y) = \frac{6702{,}4}{1} = 6702{,}4;\quad S_2^2(y) = \frac{774{,}4}{1} = 774{,}4;$$

$$S_3^2(y) = \frac{436{,}9}{1} = 436{,}9; \quad S_4^2 = \frac{35{,}2}{8} = 4{,}4;$$

Проверим значимость оценок дисперсий с помощью критерия Фишера (табл. 10 приложения):

$$F = \frac{S_1^2(y)}{S_4^2(y)} = \frac{6702{,}4}{4{,}4} = 1523{,}3 > F_{кр}(1;8;0{,}05) = 5{,}318;$$

$$F = \frac{S_2^2(y)}{S_4^2(y)} = \frac{774{,}4}{4{,}4} = 176 > F_{кр}(1;8;0{,}05) = 5{,}318;$$

$$F = \frac{S_3^2(y)}{S_4^2(y)} = \frac{436{,}9}{4{,}4} = 92{,}3 > F_{кр}(1;8;0{,}05) = 5{,}318.$$

Оценим дисперсию роста продаж колбасных изделий в 2000 г. за счет динамичного развития этой сферы маркетинга по формуле

$$S_A^2(y) = \frac{1}{n}[S_1^2(y) - S_4^2(y)] = \frac{1}{3}(6702{,}4 - 4{,}4) = 2232{,}7.$$

Оценим дисперсию, характеризующую влияние разновидности изделия на рост объема продаж:

$$S_B^2(y) = \frac{1}{n}\left[S_2^2(y) - S_4^2(y)\right] = \frac{1}{3}(774{,}4 - 4{,}4) = 256{,}7.$$

Оценим дисперсию, характеризующую влияние эффекта взаимодействия факторов *A* и *B* (динамичного развития сферы маркетинга в части продаж колбасных изделий и разновидности изделий):

$$S_{AB}^2(y) = \frac{1}{n}\left[S_3^2(y) - S_4^2(y)\right] = \frac{1}{3}(436{,}9 - 4{,}4) = 144{,}2.$$

Оценим полную дисперсию изменчивости признака:

$$S_n^2(y) = S_A^2(y) + S_B^2(y) + S_{AB}^2(y) + S_{ош}^2(y);$$

$$S_n^2(y) = 2232{,}7 + 256{,}7 + 144{,}2 + 4{,}4 = 2638.$$

Оценим вклад фактора *A* в изменчивость признака:

$$B_{вклA} = \frac{S_A^2(y)}{S_n^2(y)} 100\,\%; \quad B_{вклA} = \frac{2232{,}7}{2638} 100\,\% = 84{,}6\,\%.$$

Оценим вклад фактора *B* в изменчивость признака:

$$B_{вклB} = \frac{S_B^2(y)}{S_n^2(y)} 100\ \%; \quad B_{вклB} = \frac{256{,}7}{2638} 100\,\% = 9{,}7\,\%.$$

Оценим вклад эффекта взаимодействия в изменчивость признака:

$$B_{вклAB} = \frac{S_{AB}^2(y)}{S_n^2(y)} 100\ \%; \quad B_{вкл} = \frac{144{,}2}{2638} 100\,\% = 5{,}5\,\%.$$

Оценим вклад ошибки эксперимента и действия неучтенных факторов в изменчивость признака:

$$B_{вклОШ} = \frac{S_{ОШ}^2(y)}{S_n^2(y)}; \quad B_{вклОШ} = \frac{4{,}4}{2638} 100\,\% = 0{,}2\,\%.$$

Таким образом, месячный объем продаж колбасных изделий в 2000 г. более чем на 84 % был обусловлен совершенствованием исследуемой сферы маркетинга в течение года, более чем на 9 % – приемлемым для покупателей ассортиментом, почти на 6 % – их взаимодействием при ошибке расчетов из-за неучтенных факторов и погрешностей эксперимента, составляющей менее одного процента.

3. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ В МАРКЕТИНГЕ

3.1. Экспертные методы оценивания качества товаров и услуг

При оценивании качества товаров как совокупности трудно измеряемых свойств очень часто прибегают к экспертным методам. На численном примере (данные взяты из источника [10]) рассматривается методика и последовательность проведения опроса и обработки полученных данных.

Для выявления узлов автомобилей КамАЗ с низкой надежностью свойством, которое является главным показателем качества механических систем, осуществлен опрос экспертов (табл. 19). Они присваивали ранг, равный единице, самому надежному по их мнению узлу и ранг, равный числу объектов, – девяти, наименее надежным. Промежуточные ранги присваивались узлам также в порядке снижения надежности: численное значение ранга увеличивалось по мере снижения надежности. Некоторым объектам присваивались одинаковые ранги, если эксперты считали их надежность одинаковой, соответствующей одному уровню. В принципе, можно было бы присваивать и дробные ранги. Для простоты обработки результатов нужно, чтобы сумма рангов в каждой строке

$$s = 0{,}5k(k + 1), \tag{3.1}$$

где k – число оцениваемых объектов, в данном случае узлов автомобиля.

По результатам ранжирования вычисляется сумма рангов x_j для каждого объекта, которая и является оценкой исследуемого показателя качества.

Для оценки согласованности мнений экспертов вычисляется коэффициент конкордации. Он представляет собой дробь, в числителе которой сумма квадратов отклонений суммарных рангов x_j от общей средней их величины.

$$a = 0{,}5m(k + 1), \tag{3.2}$$

где m – число экспертов; k – число ранжируемых узлов.

Сумма квадратов отклонений

$$\sum_{j=1}^{k} L_j^2 = \sum_{j=1}^{k} (x_j - a)^2. \tag{3.3}$$

В знаменателе дроби максимально возможная сумма квадратов отклонений, которая могла бы быть при полном совпадении мнений экспертов и отсутствии одинаковых и дробных рангов по строкам, представлена выражением:

$$\sum_{j=1}^{k} L_{j\max}^2 = \frac{m^2(k^3 - k)}{12}. \tag{3.4}$$

Производим вычисления (см. табл. 19):

$$a = 0{,}5m(k+1) = 0{,}5 \cdot 9(9 + 1) = 45.$$

$$\sum_{j=1}^{k} L_j^2 = \sum_{j=1}^{k} (x_j - a)^2 = [(-26)^2 + (-24)^2 + \ldots + (-1)^2 + 28^2] = 3976.$$

Пример 1.

Таблица 19

Результаты экспертного опроса специалистов о надежности узлов автомобилей семейства КамАЗ

№ п/п	Эксперты, специалисты, проработавшие в сфере эксплуатации, технического обслуживания и ремонта автомобилей КамАЗ не менее десяти лет	Узлы автомобилей КамАЗ								
		Двигатель	Сцепление, делитель, КП	Мосты	Задняя подвеска	Пневмопривод тормозной системы	Узлы электрооборудования	Передняя подвеска	Рулевое управление	Другие механизмы и системы управления
1	Главный инженер	1	4	1	4	8	6	9	5	7
2	Заместитель директора	1	3	2	5	9	7	6	4	8
3	Механик-эксплуатационник	1	2	2	4	6	8	7	6	9
4	Технолог-ремонтник	2	3	1	5	6	7	9	4	8
5	Механик-ремонтник	2	1	3	6	5	9	7	4	8
6	Водитель	3	4	1	2	6	8	7	5	9
7	Водитель	2	1	4	4	6	7	8	4	9
8	Водитель	5	2	1	5	4	8	6	5	9
9	Водитель	2	1	2	6	4	8	9	7	6
	x_j	19	21	17	41	54	68	68	44	73
	$x_j - a$	–26	–24	–28	–4	9	23	23	–1	28
	L_j^2	676	576	784	16	81	529	529	1	784

Максимально возможная величина суммы квадратов отклонений, которая может иметь место при полном совпадении мнений экспертов с учетом наличия связанных рангов,

$$\sum_{j=1}^{k} L_{j\,\max}^2 = \frac{m^2(k^3-k) - m\sum_{u=1}^{r} T_u}{12}, \qquad (3.5)$$

где r – число строк, имеющих связанные ранги; T_u – величина, учитывающая число типов связанных рангов в строке,

$$T_u = \sum_{q=1}^{n}(t_q^3 + t_q),$$

где t – число q-х типов равных рангов в u-й строке; n – число типов связанных рангов в строке.

Первая строка табл. 19 имеет два связанных ранга одного типа (связанных по два ранга): 1, 1 и 4, 4, поэтому

$$T_1 = (2^3 – 2) + (2^3 – 2) = 12.$$

Вторая строка не имеет связанных рангов, $T_2 = 0$, третья строка имеет два связанных ранга одного типа: 2, 2 и 6, 6, поэтому

$$T_3 = (2^3 – 2) + (2^3 – 2) = 12.$$

Четвертая, пятая и шестая строки связанных рангов не имеют и $T_4 = T_5 = T_6 = 0$, седьмая срока имеет один тип связанных рангов, но отличный от предыдущих (здесь тройная связка 4,4,4), поэтому

$$T_7 = (3^3 – 3) = 24.$$

Восьмая строка имеет один трижды связанный ранг: 5,5,5 и $T_8 = (3^3 – 3) = 24$, а для девятой строки, имеющей связанные ранги 2, 2 и 6, 6 $T_9 = (2^3 – 2) + (2^3 – 2) = 12$, поэтому суммарное значение

$$T_u = 12 + 12 + 24 + 24 + 12 = 84.$$

Коэффициент конкордации

$$W = \frac{12\sum_{j=1}^{k} L_j^2}{m^2(k^3 - k) - m\sum_{u=1}^{r} T_u} = \frac{12 \cdot 3976}{9^2(9^3 - 9) - 9 \cdot 84} = 0{,}829.$$

Проверка согласованности мнений экспертов осуществляется с использованием χ^2 – мощного критерия (табл. 9 приложения), минимизирующего ошибку второго рода (принятие неверной гипотезы), при уровне значимости α – вероятности забраковать справедливую гипотезу (ошибка первого рода) и числе степеней свободы f.

Значение χ^2 – статистики вычисляется по формуле

$$\chi^2 = mfW,$$

где m – число экспертов; f – число степеней свободы $f = k – 1$, W – коэффициент конкордации.

При условии, что величина χ^2-статистики превышает критическое значение χ^2 при уровне значимости α и числе степеней свободы f, т. е. $\chi^2 = mfW > \chi_{кр}(\alpha; f)$, гипотеза о согласованности мнений экспертов не отвергается.

В рассматриваемом примере при $m = 9$, $f = 8$, $\alpha = 0,05$, поэтому

$$\chi^2 = 9(9-1)0,829 = 59,688 > \chi^2_{кр}(0,05; 8) = 15,507$$

(по табл. 9 приложения), следовательно, гипотеза о согласованности мнений экспертов не отвергается.

Пример 2. Проранжировать основные виды транспорта (табл. 20) в свете эффективности их использования для крупных отправителей по шести критериям ($m = 6$). Данные взяты из источника [7].

Таблица 20

Оценки видов транспорта по критериям крупных отправителей

№ п/п	Критерии эффективности видов транспорта	Железнодорожный	Водный	Автомобильный	Трубопроводный	Воздушный
1	Скорость (время доставки франко склад)	3	4	2	5	1
2	Частота отправок в сутки	4	5	2	1	3
3	Надежность (соблюдение графиков доставки)	3	4	2	1	5
4	Перевозочная способность перевозить широкую номенклатуру грузов	2	1	3	5	4
5	Доступность (число обслуживаемых точек)	2	4	1	5	3
6	Стоимость за тонно-милю	3	1	4	2	5
	x_j	17	19	14	19	21
	$x_j - a$	–1	1	–4	1	3
	L_j^2	1	1	16	1	9

Решение. Сумма рангов по строкам:

$$S = 0,5k(k+1) = 0,5 \cdot 5(5+1) = 15.$$

Общая средняя $a = 0,5m(k+1) = 0,5 \cdot 6(5+1) = 18$, где m – число показателей ранжирования; k – число ранжируемых объектов.

Сумма квадратов отклонений

$$\sum_{j=1}^{k} L_j^2 = 1+1+16+1+9 = 28.$$

Максимально возможная сумма квадратов отклонений при отсутствии связанных рангов

$$\sum_{j=1}^{k} L_{j\max}^2 = \frac{m^2(k^3-k)}{12} = \frac{6^2(5^3-5)}{12} = 360.$$

Значение коэффициента конкордации

$$W = \frac{\sum_{j=1}^{k} L_j^2}{\sum_{j=1}^{k} L_{j\max}^2} = \frac{28}{360} = 0{,}078\,.$$

Для оценки существенности коэффициента конкордации при числе критериев оценки эффективности транспорта m = 6 и числе степеней свободы, равном числу ранжируемых объектов минус единица ($f = k - 1 = 5 - 1 = 4$) вычисляется значение χ^2-статистики:

$$\chi^2 = mfW = 6 \cdot 4 \cdot 0{,}078 = 1{,}872 < \chi^2_{кр}(0{,}05;\, 4) = 9{,}488.$$

Критическое значение (табл. 9 приложения) превышает найденную величину c^2, гипотеза о справедливости присвоенных рангов видам транспорта, представленным в табл. 20, отклоняется, поскольку ранги, образующие совокупность, неразличимы, отличия между ними несущественны, количество использованной информации для их определения мало. По смыслу задачи можно увеличить число критериев оценки эффективности транспорта и тогда из однородной совокупности оценок можно было бы выделить существенные отличия между ними, если они есть в действительности, в смысле эффективности перевозок в сложившихся условиях.

С другой стороны, данная методика не позволяет использовать всю информацию табл. 20: в формулу оценки существенности W вошли m и f, но не сами ранги, имеющиеся в табл. 20, а это существенная информация, так как количество рангов равно тридцати. Методика также позволяет оценивать согласованность сразу всех суммарных рангов в совокупности, но может оказаться, что некоторые ранги определены экспертами четко и однозначно, а остальные практически не различимые суммарные ранги размывают, затушевывают картину. Поэтому для выделения из совокупности отличного от остальных суммарного ранга применяется способ исключения резко выделяющихся наблюдений, позволяющий использовать большую информацию, чем рассматриваемый способ Кендалла.

Суть заключается в том, что последовательно в вариационном ряду суммарных рангов: 14, 17, 19, 19, 21, определяются резко выделяющиеся значения с помощью специального ζ-критерия (табл. 21). И если таковые окажутся, то они и есть ярко выраженные, по праву занимающие свое место в исследуемом ранжире суммарные ранги. Формула, применяемая для этой процедуры, включает оценку среднего квадратического отклонения, вычисляемого по всем тридцати рангам шестерых экспертов (табл. 4 приложения).

Таблица 21

Параметры для вычисления ζ-статистики

Средние значения рангов по столбцам	17/6 = = 2,83	19/6 = = 3,17	14/6 = = 2,33	19/6 = = 3,17	21/ = = 3,5
Оценки дисперсий по столбцам	0,57	2,97	1,07	4,17	2,3
Сумма оценок дисперсий	11,07/5 = 2,21				
Среднее квадратическое отклонение	$2{,}21^{0{,}5} = 1{,}49$				
Среднее значение членов вариационного ряда	$\overline{\eta} = \dfrac{14+17+19+19+21}{5} = 18$				

Значение ζ-статистики вычисляется по формуле

$$\zeta(\eta, s^*) = \max(j)\left|\eta_i - \overline{\eta}\right| / s^*,$$

где η_j – j-й член вариационного ряда; $\overline{\eta}$ – среднее значение членов вариационного ряда; s^* – среднее квадратическое отклонение членов вариационного ряда.

При $\zeta(\eta, s^*) > \zeta_{кр}(\eta, s^*)$ гипотеза о принадлежности η_j к исследуемому вариационному ряду отвергается. Поскольку в данном ряду больше всех выделяется суммарный ранг 14, то значение ζ-статистики

$$z\,(h, s^*) = \frac{|14-18|}{1{,}49} = 2{,}68 > z_{кр}(5;0{,}05) = 1{,}917,$$

т. е. гипотеза о принадлежности ранга 14 вариационному ряду отвергается (табл. 4 приложения).

Вторым по величине отклонения от среднего значения $\overline{\eta} = 18$ является суммарный ранг 21, для него значение ζ-статистики, вычисленное по той же формуле,

$$z\,(h, s^*) = \frac{|21-18|}{1{,}49} = 2{,}01 > z_{кр}(5; 0{,}05) = 1{,}917,$$

т. е. гипотеза о принадлежности суммарного ранга 21 к исследуемому вариационному ряду также отвергается (табл. 4 приложения) и может быть принята конкурирующая гипотеза о том, что суммарный ранг 21 так же, как и ранг 14, резко выделяется из членов вариационного ряда.

Значение ζ-статистики для остальных членов вариационного ряда (17, 19, 19), имеющих абсолютное отклонение от среднего значения равное 1,

$$z\,(h, s^*) = \frac{|19-18|}{1{,}49} = 0{,}67 < z_{кр}(5; 0{,}05) = 1{,}917,$$

т. е. гипотеза о принадлежности этих трех членов к исследуемому вариационному ряду не отвергается (табл. 4 приложения).

Следовательно, автомобильный транспорт для перевозок грузов крупными отправителями в создавшихся условиях наиболее эффективен, воздушный – самый неэффективный, водный, железнодорожный и трубопроводный по эффективности однородны (безразлично, каким пользоваться) и делят второе, третье и четвертое места.

3.2. Оценивание существенности влияния рейтинга марки товара на прибыль фирм

От 50 до 90 % статистических данных, используемых в экономике, социологии, медицине, технике, имеют нечисловую природу и могут быть оценены только качественно [8]. Для количественной оценки качественных признаков используются ранги – числа, определяемые эвристическими методами. Ранги приближенно указывают на уровень качества (как совокупности свойств) объекта. Чаще всего при решении практических задач для нахождения их величин используется метод экспертных оценок. В некоторых случаях, когда часть данных – результат маркетинговых измерений, для преобразования натуральных значений экспериментальных данных в соответствующие ранги применяют интервальный метод. Он предусматривает вычисление длины интервала путем деления величины размаха выборки на количество интервалов, принимаемое исследователем, исходя из точности измерений, удобства обработки и представления результатов и т. п., установление соответствия каждого значения данных наблюдений найденным интервалам и присвоение им рангов, соответствующих уровням качества.

Пример. С целью оценки существенности влияния рейтинга марки товара на долю прибыли в объеме продаж [6] для фирм США и Великобритании проведены расчеты, представленные в табл. 22. Для установления согласованности расчетных данных с фактическими значениями рейтинга с позиций доли прибыли в объеме продаж необходимо заменить данные строки 2 соответствующими рангами.

Таблица 22

Соотношение предварительных оценок
рейтинга марок товаров и долей прибыли в объеме продаж, %

Предварительный рейтинг марки	1	2	3	4
Доля прибыли в объеме продаж, %	17,9	2,8	–0,9	–5,9

Решение. Учитывая, что количество интервалов k = 4; максимальное значение показателя X_{max} в строке 2 равно 17,9, а минимальное X_{min} = – 5,9 и размах выборки

$$R = X_{max} – X_{min},;\ R = 17{,}9 – (– 5{,}9) = 23{,}8,$$

получим длину интервала:

$$d = R/k; \quad d = 23{,}8/4 = 5{,}95.$$

Это позволяет вычислить границы интервалов (табл. 23), например, для первого интервала верхняя граница 17,9, нижняя 17,9 – 5,95 = 11,95 и т. д.

Таблица 23

Номера и границы интервалов фактических значений
долей прибыли в объеме продаж

Номер интервала			
1	2	3	4
Граница интервала			
17,9–11,95	11,95–6,00	6,00–0,05	0,05–(–5,90)

Из табл. 22 и 23 видно, что значение 17,9 попадает в первый интервал, значение 2,8 – в третий интервал, а (–0,9) и (–5,9) – в четвертый. Следовательно, значению 17,9 соответствует ранг 1, значению 2,8 – ранг 3, значению (–0,9) – ранг, равный 4, и, наконец, значению (–5,9) – тоже ранг 4. Поскольку предварительные рейтинги марок, по сути, и есть их ранги, то для дальнейшей обработки данных табл. 22 их следует преобразовать, заменив количественные показатели второй строки соответствующими рангами (табл. 24).

Таблица 24

Ранги предварительных рейтингов марок
и соответствующих долей прибыли в объеме продаж товара

Предварительный рейтинг марки	1	2	3	4
Ранг доли прибыли в объеме продаж	1	3	4	4

Для оценки согласованности предварительного рейтинга марки и долей прибыли в объеме продаж товара в данном случае может быть использован коэффициент множественной качественной конкордации [8]:

$$W(k) = 1 - \frac{4S(v)}{n(k-1)^2}, \tag{3.6}$$

где n – объем выборки или число объектов; k – число качественных уровней k = 2, 3, …, q; $S(v)$ – сумма вариаций качественных оценок; m – количество признаков.

Параметр m в формулу (3.6) входит неявно, по нему осуществляется суммирование для каждого из признаков, определяющих в конечном счете $S(v)$:

$$S(v) = \sum_1^n \mathrm{var}(x) = \sum_1^n [(\bar{x}^2) - (\bar{x})^2], \tag{3.7}$$

где $\bar{x}$ – средние значения рангов по столбцам; $(\bar{x}^2)$ – средние квадратов рангов по столбцам.

В соответствии с табл. 24 для первого столбца $\bar{x}$ = (1 + 1)/2 = 1, для второго оно равно 2,5, для третьего – 3,5, для четвертого – 4.

Средняя квадратов по столбцам: для первого столбца $(\bar{x}^2)$ = = $(1^2 + 1^2)/2$ = 1, для второго – 6,5, для третьего – 12,5, для четвертого – 16.

Вариации по столбцам: для первого столбца – $var_1(x) = 1 - 1^2 =$ $= 0$; для второго $var_2(x) = 6{,}5 - 2{,}5^2 = 0{,}25$; для третьего $var_3(x) = 12{,}5 - 3{,}5^2 =$ $= 0{,}25$; для четвертого $var_4(x) = 16 - 4^2 = 0$.

Сумма вариаций (табл. 25): $S(v) = 0 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0 = 0{,}5$.

Таблица 25

Результаты вычислений

Показатель	Ранг				Сумма
Предварительный рейтинг марки	1	2	3	4	
Доля прибыли в объеме продаж	1	3	4	4	
Средние значения рангов по столбцам	1	2,5	3,5	4	
Средняя квадратов по столбцам	1	6,5	12,5	16	
Var (x) по столбцам	0	0,25	0,25	0	$S(v) = 0{,}5$

Коэффициент множественной качественной конкордации в соответствии с формулой (3.6) при $n = 4$, $k = 4$:

$$W(k) = 1 - \frac{4S(v)}{n(k-1)^2}; \qquad W(k) = 1 - \frac{4 \cdot 0{,}5}{4(4-1)^2} = 0{,}94.$$

Учитывая, что степень согласованности при $W(k) < 0{,}75$ – «слабая», при $0{,}75 < W(k) < 0{,}85$ – «средняя», при $0{,}85 < W(k) < 0{,}95$ – «выше средней», при $W(k) > 0{,}95$ – «сильная», уровни качества товаров с рейтингами 3 и 4 практически не различимы.

Кластер – некоторая совокупность «родственных» объектов, объединенных по набору общих для этих объектов признаков.

В сравнительной характеристике различных видов транспорта (табл. 26) каждому из них присвоены ранги в зависимости от эффективности, определяемой показателями качества перевозок [7]. Ранг 1 присвоен показателям с очень низкой эффективностью, ранг 2 – с низкой эффективностью, 3 – со средней эффективностью, 4 – с хорошей, 5 – с очень хорошей. Анализируются пять видов транспорта по пяти их существенным показателям с целью выявления кластеров для выбора эффективного способа перевозок.

Таблица 26

Показатели качества перевозок различных видов транспорта

Вид транспорта	Стоимость за милю A_1	Скорость поставки A_2	Стабильность графика поставок A_3	Гибкость обработки груза A_4	Местоположение A_5
Воздушный	1	5	3	2	2
Водный	5	1	2	5	3
Жел. дор.	3	4	4	5	4
Автомобильный	2	4	4	3	5
Трубопроводный	3	2	5	1	1

Вычисляется (табл. 27) коэффициент сходства для всей совокупности объектов (для всех пяти видов транспорта) по формуле (3.6):

Таблица 27

Параметры вариации уровней качества объектов

Средние	2,8	3,2	3,6	3,2	3,0	Сумма
Средние квадратов	9,6	12,4	14	12,8	11,0	
Var(*x*)	1,76	2,16	1,04	2,56	2,0	$S(v)=9{,}52$

Коэффициент при $n = 5$ и $k = 5$:

$$W = 1 - \frac{4 \cdot 9{,}52}{5(5-1)^2} = 0{,}524.$$

Для формирования матрицы парных свойств рассчитываются коэффициенты сходства для каждой пары объектов.

Например, расчет коэффициента сходства качественных оценок для воздушного и водного транспорта представлен в табл. 28.

Таблица 28

Расчет параметров для вычисления коэффициента сходства оценок эффективности воздушного и водного транспорта

Воздушный транспорт	1	5	3	2	2
Водный транспорт	5	1	2	5	3
Средние значения оценок	3	3	2,5	3,5	2,5
Средние квадратов	13	13	6,5	14,5	6,5
Var (*x*)	4	4	0,25	2,25	0,25

Сумма вариаций качественных оценок

$$S(v) = 4 + 4 + 0{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25 = 10{,}75,$$

коэффициент сходства в соответствии с формулой (3.6)

$$W_{12} = 1 - \frac{4 \cdot 10{,}75}{5(5-1)^2} = 0{,}463.$$

Вычислив коэффициенты сходства для всех пар, получим матрицу парных сходств в виде табл. 29.

Из табл. 29 следует, что первый кластер (A_3, A_4) состоит из элементов с парным коэффициентом сходства, соответствующим «выше средней» плотности оценок. Второй кластер (A_1, A_4, A_5) содержит элементы с парными коэффициентами сходства, соответствующими «средней» плотности.

Таблица 29

Матрица парных сходств
качественных оценок эффективности видов транспорта

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	0,463	0,763	**0,838**	**0,763**
A_2		1	0,775	0,625	0,575
A_3			1	**0,925**	0,625
A_4				1	0,675
A_5					1

Коэффициент сходства между кластерами вычисляется по формуле (3.6), элементами расчетной матрицы служат все элементы, образующие эти кластеры: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (табл. 30).

Таблица 30

Данные для расчета коэффициента сходства между кластерами

Вид транспорта	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Воздушный	1	5	3	2	2
Жел. дор.	3	4	4	5	4
Автомобильный	2	4	4	3	5
Трубопроводный	3	2	5	1	1
Средние	2,25	3,75	4	2,75	3
Средние квадратов	5,75	15,25	16,5	9,75	11,5
$Var(x)$	0,69	1,19	0,5	2,19	2,5

Вычисляем $S(v) = 0{,}69 + 1{,}19 + 0{,}5 + 2{,}19 + 2{,}5 = 7{,}07$.

Коэффициент сходства,

$$W_{12} = 1 - \frac{4 \cdot S(v)}{n(k-1)^2}, \qquad W_{12} = 1 - \frac{4 \cdot 7{,}07}{5(5-1)^2} = 0{,}646,$$

т. е. первый и второй кластеры практически не имеют сходства, являясь независимыми скоплениями сходных между собой оценок.

Центр кластера [8] – некоторый условный объект, координаты которого есть средние значения соответствующих координат всех объектов, входящих в кластер. Например, для кластера (A_3, A_4) средние значения координат составят:

1) (3 + 2)/2 = 2,5; 2) (4 + 4)/2 = 4; 3) (4 + 4)/2 = 4; 4) (5 + 3)/2 = 4;

5) (4 + 5)/2 = 4,5, т. е. центр кластера будет иметь координаты, приведенные в табл. 31.

Таблица 31

Координаты центра кластера (A_3, A_4)

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
2,5	4	4	4	4,5

Для нахождения центра второго кластера (A_1, A_4, A_5) необходимо вычислить координаты пар (табл. 9) A_1, A_4, A_1, A_5, а затем подсчитать их средние значения. Координаты пар находят так же, как и координаты центра кластера (A_3, A_4). Координаты центра второго кластера – средние по столбцам табл. 32.

Таблица 32

Координаты пар и центра кластера

Координаты пары A_1, A_4	1,5	4,5	3,5	2,5	3,5
Координаты пары A_1, A_5	2,0	3,5	4,0	1,5	1,5

Данные для расчета коэффициента сходства между кластерами (A_3, A_4) и (A_1, A_4, A_5) представлены в табл. 33.

Таблица 33

Параметры для расчета коэффициента сходства между кластерами

Параметры	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Центр кластера (A_3, A_4)	2,5	4,0	4,0	4,0	4,5
Центр кластера (A_1, A_4, A_5)	1,75	4	3,75	2	2,5
Средние значения координат	2,13	4	3,88	3,0	3,5
Средние квадратов координат	4,66	16	15	10	13,3
Var (x)	0,14	0	0,02	1	1

Вычисляем $S(v) = 0{,}14 + 0{,}02 + 1 + 1 = 2{,}16$.

Коэффициент сходства между центрами первого и второго кластеров

$$W_Ц(1,2) = 1 - \frac{4 \cdot S(v)}{n(k-1)^2}; \qquad W_Ц(1,2) = 1 - \frac{4 \cdot 2{,}16}{5(5-1)^2} = 0{,}892.$$

Расстояние между кластерами 1 и 2 вычисляется по формуле

$$R = 1 - W_Ц.$$

В данном случае $R(1,2) = 1 - 0{,}892 = 0{,}108$.

Расстояние между кластерами, «сгустками» довольно точно согласующихся ранговых оценок, невелико, тем более, что области с низкой плотностью согласования рангов также невелики.

Вычисления показывают, что рейтинговые оценки и на их основании присвоенные ранги достоверны. Показатели по железнодорожному и автомобильному транспорту наиболее точны. В предположении, что уровень квалификации всех экспертов, оценивающих эффективность данных видов транспорта, достаточно высок, результатами расчета можно руководствоваться при выборе вариантов доставки товаров.

4. УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

4.1. Термины, постановка задачи

Основной предмет изучения – связь между *Q* – количеством запаса на складе и временем, для которого рассматривается этот запас [20], т. е. исследуется функция $Q = f(t)$. Затраты, связанные с запасами:

1. Организационные издержки – расходы, обусловленные необходимостью оформления и доставки товара; они зависят также от подготовительно-заключительных операций при поступлении товара и подаче заявок и поэтому имеют место при каждом цикле складирования. Если запасы необходимо пополнить, то на склад завозится очередная партия. Издержки, связанные с поставкой, называются организационными. Количество товара, поставляемое на склад, называется размером партии.

2. Издержки содержания запасов – это затраты, связанные с хранением (содержание или аренда помещений, естественная порча товара).

3. Издержки, связанные с дефицитом (штрафы); если поставки со склада не могут быть выполнены, то возникают дополнительные издержки, обусловленные вынужденным отказом. Это может быть реальный денежный штраф, а может быть просто ухудшение бизнеса в будущем из-за потери разочаровавшихся в поставщике потребителей.

Основная модель управления запасами – определение оптимального размера партии.

В упрощенной модели рассматриваются следующие величины, представленные в табл. 34.

Таблица 34

Исходные данные для вычисления размера партии

Параметр	Обозначение	Единица измерения	Условия эффективности применения модели
1	2	3	4
Интенсивность спроса	d	Единицы товара в год	Спрос постоянен и непрерывен, весь спрос удовлетворяется
Организационные издержки	s	У.е. за 1 партию	Организационные издержки постоянны и не зависят от размера партии
Стоимость товара	c	У.е. за единицу товара	Цена постоянна, рассматривается 1 вид товара

Окончание табл. 34

1	2	3	4
Издержки содержания запаса	h	У.е. за единицу товара в год	Стоимость хранения товара в течение года постоянна
Размер партии	q	Ед. товара в одной партии	Постоянная величина размера партии, поступление мгновенное, как только уровень запаса становится равным нулю

Обычно задача управления запасами ставится так: определить размер партии q, при котором годовые затраты будут минимальны. Для условий задачи, сформулированных в табл. 34, зависимость $Q = f(t)$ имеет вид, представляемый графиком (рис. 4.1).

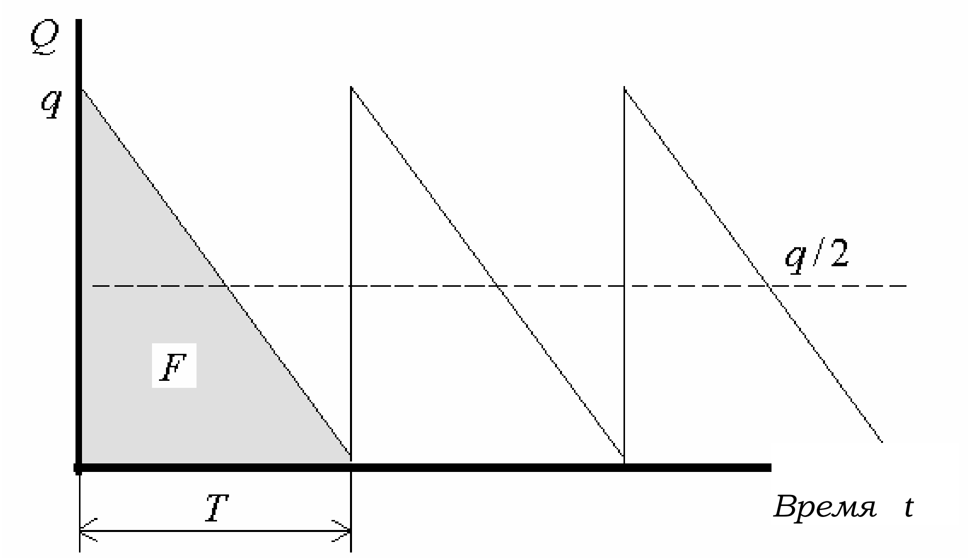

Рис. 4.1. График изменения и пополнения запасов: Q – уровень запаса (по оси ординат); q – размер поставки (начало цикла); F – площадь под графиком; T – продолжительность цикла; $q/2$ – средний уровень запаса

Замечания: 1) чтобы удовлетворить годовой спрос d при размере поставки (партии) q нужно сделать d/q поставок в год; 2) средний уровень запасов $q/2 = F/T$; F – площадь под графиком за цикл T.

Уравнение издержек:

$C = C_1$ (организационные издержки) + C_2 (стоимость товара) + + C_3 (общие издержки содержания запасов).

$$C = s\frac{d}{q} + cd + h\frac{q}{2}.$$

Оптимальное значение q находят, положив $\frac{dC}{dq} = 0$, т. е.

$$-\frac{sd}{q^2} + 0 + \frac{h}{2} = 0.$$

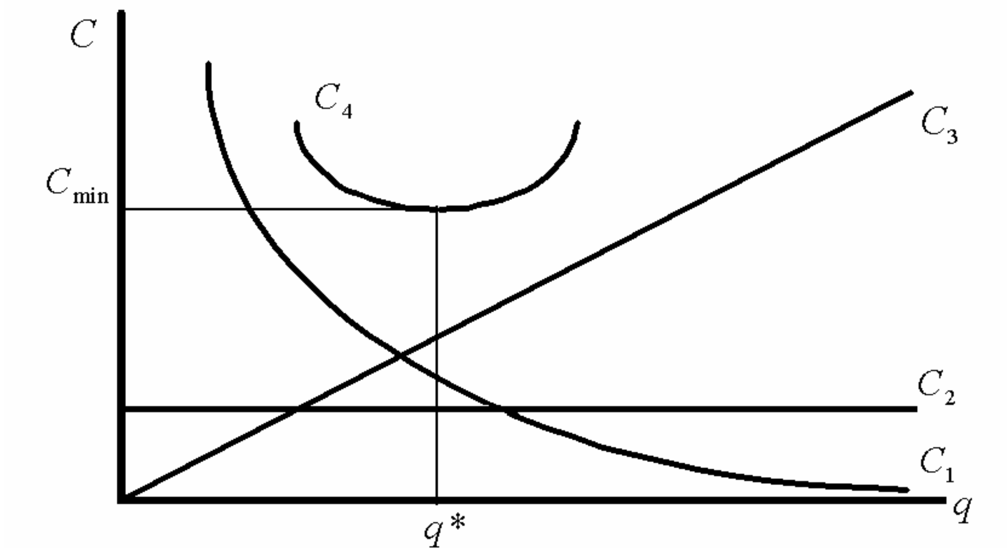

Рис. 4.2. График для определения оптимального размера партии: C_4 – суммарные издержки; C_{min} – минимальные суммарные издержки; q^* – оптимальный размер партии

Решая уравнение относительно q – переменной величины, имеем

$$q^* = \sqrt{\frac{2sd}{h}};$$

где q^* – оптимальный размер партии.

Учитывая, что $C_1 = \frac{sd}{q}$ – общие организационные издержки, $C_2 = cd$ – стоимость товара, $C_3 = \frac{hq}{2}$ – общие издержки содержания запасов, получим график, приведенный на рис. 4.2.

4.2. Расчет оптимального размера партии при равномерном спросе

Пример. Интенсивность равномерного спроса составляет 2000 единиц товара в год, организационные издержки для одной партии составляют 50 у.е., цена единицы товара составляет 100 у.е., издержки содержания запаса равны 1 у.е. за единицу товара в год, т. е. d = 2000 ед.товара в год, s = 50 у.е., c = 100 у.е., h = 1 у.е./ед. товара в год. Найти оптимальный размер партии (количество единиц товара в партии), оптимальное число поставок в год, оптимальную продолжительность цикла.

Решение. Поскольку общие издержки

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{sd}{q} + cd + \frac{hq}{2}; \quad C = \frac{2000 \cdot 50}{q} + 2000 \cdot 100 + \frac{q \cdot 1}{2},$$

тогда

$$\frac{dC}{dq} = -\frac{100000}{q^2} + \frac{1}{2}.$$

Приняв $\frac{dC}{dq} = 0$, получим $\frac{100000}{q^2} = \frac{1}{2}$, откуда q^2 = 200000, и $q = \sqrt{200000} = 447$ ед. товара в партии.

Оптимальное число поставок в году:

$$n^* = \frac{d}{q^*} = \frac{2000}{447} \approx 4{,}5$$

Оптимальная продолжительность цикла:

$$T^* = \frac{365}{n^*} \approx 80 \text{ дней.}$$

4.3. Расчет оптимального размера партии в случае модели производственных поставок

Когда готовые товары доставляются на склад непосредственно с производственной линии, поступление не будет мгновенным. Дополнительный параметр – скорость производства p – равна количеству товаров, выпускаемых линией в течение года; спрос постоянен и равен d. Как только уровень запасов упадет до нуля с производственной линии начнет поступать товар на склад. Величина q – размер партии. График, отвечающий постановке задачи представлен на рис. 4.3.

Общие издержки в течение года, как и в предыдущей модели,

C = C_1 (общие затраты на организацию запаса) + C_2 (стоимость товара) + C_3 (общие затраты на хранение запасов).

При спросе d товаров в год одна поставка содержит q единиц товара, поэтому за год необходимо сделать $n = d/q$ поставок, следовательно,

$C_1 = \dfrac{sd}{q}$, $C_2 = cd$, C_3 = (средний уровень запасов)$\times n$.

Для определения среднего уровня запасов используются следующие два обстоятельства:

1) максимальный уровень $RT = (p - d)t$;

2) количество единиц товара в одной поставке $q = pt$.

Тогда средний уровень запасов:

$0{,}5RT = \dfrac{(p-d)t}{2}$, но $t = \dfrac{q}{p}$, тогда средний уровень запасов $0{,}5RT = \dfrac{(p-d)q}{2p}$, а общие затраты на хранение запасов $C_3 = \dfrac{(p-d)qh}{2p}$.

Уравнение для общих годовых издержек:

$$C = \frac{sd}{q} + cd + \frac{(p-d)qh}{2p}.$$

Приравняв $\dfrac{dC}{dq} = 0$, получим $-\dfrac{sd}{q^2} + \dfrac{(p-d)h}{2p}$, откуда оптимальный размер партии $q^* = \sqrt{\dfrac{2psd}{(p-d)h}}$.

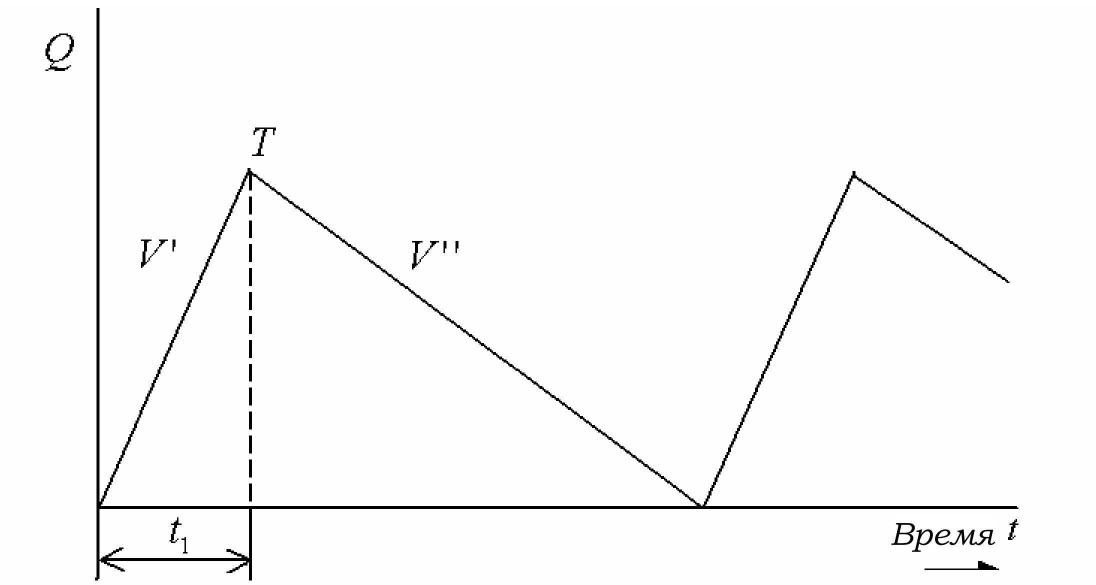

Рис. 4.3. Модель производственных поставок: Q – уровень запаса товаров; t – время; RT – максимальный уровень запасов; t_1 – продолжительность поставок; V' – скорость пополнения запасов, равная $p - d$; V''– постоянный спрос с интенсивностью d

Пример. При тех же данных: $d = 2000$ ед. товара в год, $s = 50$ у.е., $c = 100$ у.е., $h = 1$ у.е. за ед. товара, $p = 4000$ ед. товара в год, оптимальный размер партии составит

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 4000 \cdot 50 \cdot 2000}{(4000 - 2000)1}},\ q^* \approx 633 \text{ ед. товара.}$$

Оптимальное число партий в течение года

$$n^* = \frac{d}{q^*} = \frac{2000}{633} \approx 3{,}2 \text{ парт.}$$

Продолжительность поставки

$$t = \frac{q^*}{p} = \frac{633}{4000} \approx 0{,}16 \text{ год.} \approx 58 \text{ дней.}$$

Продолжительность цикла

$$l = \frac{1}{n^*} = \frac{1}{3{,}2} \approx 0{,}31 \text{ года} \approx 110 \text{ дней.}$$

Максимальный уровень запасов

$$RT = \frac{(p-d)q^*}{p} = \frac{(4000-2000)633}{4000} = 317 \text{ ед. товара.}$$

Средний уровень запасов

$$0{,}5RT = 0{,}5 \cdot 317 = 158 \text{ ед. товара.}$$

5. МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

5.1. Термины, определения

Очереди как элементы упорядочения процессов в производстве, сбыте и потреблении товаров имеют место во всех сферах маркетинговой деятельности. Основные параметры очереди характеризуются свойствами входящего потока требований, потока обслуживания и дисциплины очереди. Расчеты систем обслуживания производятся с целью уменьшения нагрузок на обслуживающие приборы, уменьшения длины очередей, снижения затрат на обслуживание, увеличения пропускной способности системы и т. п. Основные показатели работы систем: длина очереди, время нахождения требования в системе, доля времени, в течение которого прибор бывает свободен.

Наиболее универсальной моделью системы массового обслуживания является модель с пуассоновским входящим потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания.

Распределение Пуассона – распределение вероятностей случайных величин x_i, принимающих целые неотрицательные значения $k = 0,1,2,\ldots,n$ с вероятностями [3, 4, 9, 20]

$$P(x=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad (5.1)$$

где $\lambda > 0$ – параметр.

Математическое ожидание, дисперсия и моменты более высоких порядков равны λ. Сумма независимых случайных величин X_i, имеющих распределение Пуассона с параметрами λ_i, подчиняется также распределению Пуассона с параметрами $\sum\lambda_i$. Это предельное распределение безгранично делимо: если сумма случайных величин имеет распределение Пуассона, то каждое слагаемое можно представить как распределенное по закону Пуассона.

Поток событий – это последовательность событий, происходящих одно за другим в случайные моменты времени.

Поток называют стационарным, если вероятность появления некоторого числа событий в какой-то промежуток времени зависит только от величины временного промежутка.

Поток событий называют потоком без последействия, если для любых не перекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Поток событий называют ординарным, если вероятность попадания на элементарный участок Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Если поток обладает всеми тремя свойствами, он называется простейшим (пуассоновским).

Время обслуживания (как и время между поступлениями в систему обслуживания), когда поток обслуживания (или поступления в систему) обладает этими тремя свойствами, распределено по экспоненциальному закону

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}, \qquad (5.2)$$

где μ – параметр, величина, обратная среднему времени обслуживания одной заявки: $\mu = 1/m_{t\ обсл}$.

Величина λ должна быть меньше, чем μ, иначе очередь будет расти до бесконечности по геометрической прогрессии.

Когда входящий поток – пуассоновский, а время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, при одном приборе обслуживания, система обозначается $M/M/1$. Буква G в обозначении системы массового обслуживания означает произвольное распределение, E_k – распределение Эрланга порядка k, D – детерминированный поток (равные промежутки времени между поступлениями требований в систему или применительно к прибору обслуживания – неслучайное и одинаковое время обслуживания для всех требований). Например, $E_3/G/2$ означает, что входящий поток системы – эрланговский третьего порядка, поток обслуживания имеет произвольное распределение времени обслуживания, число обслуживающих приборов равно двум.

5.2. Вычисление показателей простейшей очереди

При формулировании задачи важную роль играет дисциплина очереди, здесь рассматривается следующая: требование приходит в систему и дожидается обслуживания, а например, не уходит, если очередь велика, и, кроме того, каждое требование обслуживается в свою очередь без каких-либо приоритетов.

Отношение $\lambda/\mu = \rho$ – загрузка системы (коэффициент загрузки). Расчетные формулы для системы $M/M/1$ имеют следующий вид:

вероятность того, что обслуживающий прибор свободен,

$$P_0 = 1 - \rho. \tag{5.3}$$

среднее число требований в системе (находящихся в очереди и на обслуживании)

$$E(n) = \rho/(1 - \rho); \tag{5.4}$$

среднее время ожидания обслуживания

$$E(t) = \rho/[\mu(1 - \rho)]; \tag{5.5}$$

средняя длина очереди, ожидающей обслуживания,

$$E(n_o) = \rho^2/(1 - \rho); \tag{5.6}$$

среднее время, проведенное требованием в системе,

$$E(t_c) = 1/[\mu(1 - \rho)]. \tag{5.7}$$

Пример 1. Требования поступают на обслуживающее устройство (в кассу магазина для оплаты покупок) случайно, причем средний промежуток времени между поступлениями требований равен 1,0 мин, среднее время обслуживания – 0,8 мин. Определить: среднее число требований в системе; среднее время ожидания обслуживания; среднюю длину очереди, ожидающей обслуживания; среднее время; проведенное требованием в системе; вероятность отсутствия требований в системе, если она состоит из одного прибора и имеет пуассоновский входящий поток и экспоненциальное время обслуживания ($M/M/1$).

Решение. Так как средний промежуток времени между поступлениями требований известен: $m_{t\ пост}$ = 1 мин, то среднее число покупателей, приходящих к кассе для расчета за покупки в течение 1 мин,

$$\lambda = 1/m_{t\ пост};\ \lambda = 1/1 = 1 \text{ покупатель/мин.}$$

Поскольку среднее время обслуживания $m_{t\ обсл}$ = 0,8 мин, то среднее число покупателей, обслуживаемых в 1 мин,

$$\mu = 1/m_{tобсл};\ \mu = 1/0{,}8 = 1{,}25,$$

т. е. в среднем кассир обслуживает более одного покупателя в минуту.

Тогда вероятность простоя системы (в данном случае кассы и кассира)

$$P_0 = 1 - \rho;\ P_0 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2,$$

т. е. 20 % рабочего времени система простаивает.

Среднее число покупателей в системе (стоят в очереди плюс один рассчитывается за покупку)

$$E(n) = \rho/(1 - \rho);\ E(n) = 0{,}8/(1 - 0{,}8) = 4 \text{ покупателя.}$$

Среднее время ожидания в очереди

$$E(t) = \rho/\mu(1 - \rho);\ E(t) = 0{,}8/(1{,}25\cdot 0{,}2) = 3{,}2 \text{ мин.}$$

Средняя длина очереди, ожидающей обслуживания,

$$E(n_0) = \rho^2/(1 - \rho);\ E(n) = 0{,}8^2/\ (1 - 0{,}8) = 3{,}2 \text{ покупателя.}$$

т. е., как правило, немногим больше трех покупателей стоят в очереди.

Среднее время, проведенное покупателем в системе, ожидая сначала в очереди, а потом и собственно своего обслуживания кассиром,

$$E(t_c) = 1/\mu(1 - \rho);\ \ E(t_c) = 1/[1{,}25\cdot(1 - 0{,}8)] = 4\text{ мин.}$$

Пример 2. При этих же условиях задачи рассматривается ситуация: добавлен еще один кассовый аппарат с кассиром при тех же условиях: все покупатели стоят в одной очереди и, как только один из кассиров освобождается, первый из стоящих в очереди поступает к нему на обслуживание (т. е. имеет место система *M/M/2*). Как изменятся первые три основных показателя?

Решение. Вероятность простоя системы

$$P_0 = (2 - \rho)/\ (2 + \rho);\ \ P_0 = (2 - 0{,}8)/(2 + 0{,}8) = 0{,}43,$$

т. е. 43 % рабочего времени кассиры будут простаивать.

Среднее число требований в системе

$$E(n) = 2\rho/(4 - \rho^2);\ \ E(n) = 2\cdot 0{,}8/(4 - 0{,}8^2) = 0{,}48,$$

т. е. практически очереди нет.

Среднее время ожидания обслуживания

$$E(t) = \rho^2/[\mu(4 - \rho^2)];\ \ E(t) = 0{,}8^2/\ 1{,}25(4 - 0{,}8^2) = 0{,}15\text{ мин.}$$

При увеличении числа обслуживающих приборов на единицу практически не стало очереди и покупателям не приходится терять время в ней.

Модели *M/M/m* (здесь *m* – число обслуживающих приборов) можно использовать в любых случаях, нужно только помнить, что они дают завышенные показатели при одних и тех же значениях λ и μ, когда законы распределения величин, формирующих случайные потоки, более упорядочены.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисциплина «Маркетинг» занимает одно из важнейших мест в системе подготовки высококвалифицированных инженеров-экономистов в части приобретения ими фундаментальных понятий, знаний терминологии, организации, структуры и методов оптимизации процессов производства, сбыта и потребления товаров.

В практике выполнения дипломных работ собственно маркетинговая тематика является одной из ведущих, помимо этого при выполнении дипломной работы на любую другую тему приходится решать комплекс маркетинговых задач – неотъемлемой составной части экономической проблематики.

Удаленность предприятий Норильского промышленного района от заводов-изготовителей технологического оборудования, машин и материалов предполагает наличие множества вариантов выбора поставщиков, потребителей продукции НПР и видов транспорта, поэтому привитие знаний, умений и навыков исследовательского подхода к решению практических задач является необходимой составляющей процесса обучения.

Кем бы и где бы не работал молодой специалист, он обязательно столкнется с задачами, способы разрешения которых и все основные и необходимые данные приведены в настоящем пособии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Большев, Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. М.: Наука, 1983. 416 с.

2. Вознесенский, В. А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях / В. А. Вознесенский. М.: Статистика, 1981. 263 с.

3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. М.: Наука, 1969. 576 с.

4. Вагнер, Г. Основы исследования операций / Г. Вагнер. М.: Наука, 1972. 420 с.

5. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. М.: Высш. шк., 1977. 479 с.

6. Голубков, Е. П. Основы маркетинга: Учебник / Е. П. Голубков. М.: Изд-во «Финпресс», 1999. 656 с.

7. Котлер, Ф. Основы маркетинга / Ф. Котлер. М.: Бизнес-книга, 1995. 702 с.

8. Красильников, В. В. Статистика объектов нечисловой природы / В. В. Красильников. Наб. Челны: Изд-во Камского политехнического института, 2001. 144 с.

9. Саати, Т. Математические методы исследования операций/ Т. Саати. М.: Воениздат, 1963. 219 с.

10. Алифанов, А. Л. Северные регионы. Потребность в ремонтных комплектах для автомобилей / А. Л. Алифанов // Автомобильная промышленность. 1997. № 12. С. 20–22.

11. Бушуева, Л. И. Методы прогнозирования объема продаж / Л. И. Бушуева // Маркетинг в России и за рубежом. 2002. № 1. С. 15–29.

12. Виноградов, В. А. Некоторые вопросы ценообразования на основе спроса на рынке бытовой мебели Российской Федерации / В. А. Виноградов // Маркетинг в России и за рубежом. 2002. № 5. С. 77–85.

13. Канунников, С. И. Автобум по-русски / С. И. Канунников, Д. С. Канунников // Маркетинг в России и за рубежом. 2002. № 2. С. 108–114.

14. Каплина, О. В. Оценка конкурентоспособности массового товара (на примере пива) / О. В. Каплина // Маркетинг в России и за рубежом. 2001. № 4. С. 28–48.

15. Кац, И. С. Компьютерный рынок: настоящее и ближайшее будущее / И. С. Кац, Л. В. Тихонова // Маркетинг в России и за рубежом. 2001. № 3. С. 35–41.

16. Ларионов, В. Г. Проблема фальсификации товарной продукции в России и за рубежом / В. Г. Ларионов, М. Н. Скрыпников // Маркетинг в России и за рубежом. 2001. № 1. С 114–119.

17. Савин, В. А. Роль субъектов Российской Федерации в формировании товарной структуры экспорта страны / В. А. Савин, В. А. Сковорода // Маркетинг в России и за рубежом. 2002. № 3. С. 42–52.

18. Чуровский, С. Р. Продуктовый портфель мясоперерабатывающего предприятия / С. Р. Чуровский, Г. В. Сафонов // Маркетинг в России и за рубежом. 2002. № 4. С. 19–31.

19. Шекова, Е. Л. Маркетинговое исследование рынка культурных услуг в России и за рубежом / Е. Л. Шекова // Маркетинг в России и за рубежом. 2002. № 6. С. 23–29.

20. Тернер, Д. Вероятность, статистика и исследование операций / Д. Тернер. М.: Статистика, 1976. 431 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблицы математической статистики [1]

Таблица 1

Критерий знаков. Доверительные пределы для медианы

μ	Уровень значимости α		μ	Уровень значимости α	
	0,10	*0,05*		*0,10*	*0,05*
0	4	5	26	64	67
1	7	8	27	66	69
2	9	11	28	68	71
3	12	13	29	70	74
4	14	16	30	72	76
5	17	18	31	75	78
6	19	21	32	77	80
7	21	23	33	79	82
8	24	26	34	81	85
9	26	28	35	83	87
10	28	30	36	85	89
11	31	33	37	87	91
12	33	35	38	90	93
13	35	37	39	92	96
14	37	40	40	94	98
15	39	42	41	96	100
16	42	44	42	98	102
17	44	47	43	100	104
18	46	49	44	102	106
19	48	51	45	105	109
20	51	53	46	107	111
21	53	56	47	109	113
22	55	58	48	111	115
23	57	60	49	113	117
24	59	62	50	115	119
25	62	65	51	117	122

Таблица предназначена для проверки гипотезы p = 0,5 в последовательности независимых испытаний. Если в результате наблюдений было установлено, что количество «положительных исходов» равно μ, то для проверки гипотезы p = 0,5 по таблице следует найти критические значения $N(Q, \mu)$ и $N(Q, n - \mu)$, соответствующие заданному уровню значимости α.

1. При альтернативе $\{p < 0{,}05\}$ основная гипотеза отвергается с уровнем значимости α, если $n \geq N(\alpha, \mu)$.

2 . При альтернативе $\{p > 0{,}5\}$ основная гипотеза $p = 0{,}5$ отвергается с уровнем значимости α, если $n \geq N(\alpha, n - \mu)$.

3. При двусторонней альтернативе $\{p \neq 0{,}5\}$ основная гипотеза $p = 0{,}5$ отвергается с уровнем значимости 2α, если $n \geq N\ (\alpha, \min\ (\mu, n - \mu))$.

Таблица 2

Критические значения для количества серий

m	*n*	Уровни значимости		*m*	*n*	Уровни значимости	
		0,10	*0,05*			*0,10*	*0,05*
2	2	1 5	1 5	5	5	3 9	2 10
	3	1 6	1 6		6	3 10	3 10
	4	1 6	1 6		7	3 10	3 11
	5	1 6	1 6		8	3 11	3 11
	6	1 6	1 6		9	4 11	3 12
	7	1 6	1 6		10	4 11	3 12
	8	2 6	1 6		11	4 12	4 12
	9	2 6	1 6		12	4 12	4 12
	10	2 6	1 6		13	4 12	4 12
	12	2 6	2 6		14	5 12	4 12
	20	2 6	2 6		18	5 12	5 12
3	3	1 7	1 7		20	5 12	5 12
	4	1 7	1 8	6	6	3 11	3 11
	5	2 8	1 8		7	4 11	3 12
	6	2 8	2 8		8	4 12	3 12
	7	2 8	2 8		9	4 12	4 13
	8	2 8	2 8		10	5 12	4 13
	9	2 8	2 8		11	5 13	4 13
	10	3 8	2 8		12	5 13	4 13
	11	3 8	2 8		13	5 13	5 14
	15	3 8	3 8		14	5 13	5 14
	16	3 8	3 8		15	6 14	5 14
	17	3 8	3 8		20	6 14	6 14
	20	3 8	3 8	7	7	4 12	3 13
4	4	2 8	1 9		8	4 13	4 13
	5	2 9	2 9		9	5 13	4 14
	6	3 9	2 9		10	5 13	5 14
	7	3 9	2 10		11	5 14	5 14
	8	3 10	3 10		12	6 14	5 14
	9	3 10	3 10		13	6 14	5 15
	11	3 10	3 10		14	6 14	5 15
	12	4 10	3 10		15	6 15	5 15
	13	4 10	3 10		16	6 15	6 16

Окончание табл. 2

m	*n*	Уровни значимости		*m*	*n*	Уровни значимости	
		0,10	*0,05*			*0,10*	*0,05*
	16	4 10	4 10		17	7 15	6 16
	20	4 10	4 10		20	7 15	6 16
8	8	5 13	4 14	11	18	10 20	9 20
	9	5 14	5 14		19	10 20	9 21
	10	6 14	5 15		20	10 20	9 21
	11	6 15	5 15	12	12	8 18	7 19
	12	6 15	6 16		13	9 18	8 19
	14	7 16	6 16		14	9 19	8 20
	17	7 16	7 17		15	9 19	8 20
	18	8 16	7 17		16	10 20	9 21
	19	8 16	7 17		17	10 20	9 21
	20	8 17	7 17		18	10 21	9 21
9	9	6 14	5 15		19	10 21	10 22
	10	6 15	5 16		20	11 21	10 22
	11	6 15	6 16	13	13	9 19	8 20
	12	7 16	6 16		14	9 20	9 20
	13	7 16	6 17		15	10 20	9 21
	14	7 17	7 17		16	10 21	9 21
	15	8 17	7 18		17	10 21	10 22
	17	8 17	7 18		18	11 21	10 22
	18	8 18	8 18		19	11 22	10 23
	19	8 18	8 18		20	11 22	10 23
	20	9 18	8 18	14	14	10 20	9 21
10	10	6 16	6 16		15	10 21	9 22
	11	7 16	6 17		16	11 21	10 22
	12	7 17	7 17		17	11 22	10 23
	13	8 17	7 18		18	11 22	10 23
	14	8 17	7 18		19	12 23	11 23
	15	8 18	7 18		20	12 23	11 24
	16	8 18	8 19	15	15	11 21	10 22
	17	9 18	8 19		16	11 22	10 23
	18	9 19	8 19		17	11 22	11 23
	19	9 19	8 20		18	12 23	11 24
	20	9 19	9 20		19	12 23	11 24
11	11	7 17	7 17		20	12 24	12 25
	12	8 17	7 18	16	16	11 23	11 23
	13	8 18	7 19		17	12 23	11 24
	14	8 18	8 19		18	12 24	11 25
	15	9 19	8 19		19	13 24	12 25
	16	9 19	8 20		20	13 25	12 25
	17	9 19	9 20		–		

Таблица 3

Критические значения статистики *W*-критерия Вилкоксона

m	*n*	Уровни значимости		*m*	*n*	Уровни значимости	
		0,10	*0,05*			*0,10*	*0,05*
1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	1	–	3	14	16	13
	18	1	–		15	16	13
	19	2	1		16	17	14
	25	2	1		17	18	15
2	3	3	–		18	19	15
	4	3	–		19	20	16
	5	4	3		20	21	17
	6	4	3		21	21	17
	7	4	3		22	22	18
	8	5	4		23	23	19
	9	5	4		24	24	19
	10	6	4		25	25	20
	11	6	4	4	4	13	11
	12	7	5		5	14	12
	13	7	5		6	15	13
	14	8	6		7	16	14
	15	8	6		8	17	15
	16	8	6		9	19	16
	17	9	6		10	20	17
	18	9	7		11	21	18
	19	10	7		12	22	19
	20	10	7		13	23	20
	21	11	8		14	25	21
	22	11	8		15	26	22
	23	12	8		16	27	24
	24	12	9		17	28	25
	25	12	9		18	30	26
3	3	7	6		19	31	27
	4	7	6		20	32	28
	5	8	7		21	33	29
	6	9	8		22	35	30
	7	10	8		23	36	31
	8	11	9		24	38	32
	9	11	10		25	38	33
	10	12	10	5	5	20	19
	11	13	11		6	22	20
	12	14	11		7	23	21
	13	15	12		8	25	23

Продолжение табл. 3

m	*n*	Уровни значим.		*m*	*n*	Уровни значим.		*m*	*n*	Уровни значим.	
		0,10	*0,05*			*0,10*	*0,05*			*0,10*	*0,05*
5	9	27	24	7	9	46	43	9	13	83	78
	10	28	26		10	49	45		14	86	81
	11	30	27		11	51	47		15	90	84
	12	32	28		12	54	49		16	93	87
	13	33	30		13	56	52		17	97	90
	14	35	31		14	59	54		18	100	93
	15	37	33		15	61	56		19	103	96
	16	38	34		16	64	58		20	107	99
	17	40	35		17	66	61		21	110	102
	18	42	37		18	69	63		22	113	105
	19	43	38		19	71	65		23	117	108
	20	45	40		20	74	67		24	120	111
	21	47	41		21	76	69		25	123	114
	22	48	43		22	79	72	10	10	87	82
	23	50	44		23	81	74		11	91	86
	24	51	45		24	84	76		12	94	89
	25	53	47		25	86	78		13	98	92
6	6	30	28	8	8	55	51		14	102	96
	7	32	29		9	58	54		15	106	99
	8	34	31		10	60	56		16	109	103
	9	36	33		11	63	59		17	113	106
	10	38	35		12	66	62		18	117	110
	11	40	37		13	69	64		19	121	113
	12	42	38		14	72	67		20	125	117
	13	44	40		14	75	69		21	128	120
	14	46	42		16	78	72		22	132	123
	15	48	44		17	81	75		23	136	127
	16	50	46		18	84	77		24	140	130
	17	52	47		19	87	80		25	144	134
	18	55	49		20	90	83	11	11	106	100
	19	57	51		21	92	85		12	110	104
	20	59	53		22	95	88		13	114	108
	21	61	55		23	98	90		14	118	112
	22	63	57		24	101	93		15	123	116
	23	65	58		25	104	96		16	127	120
	24	67	60	9	9	70	66		17	131	123
	25	69	62		10	73	69		18	135	127
7	7	41	39		11	76	72		19	139	131
	8	44	41		12	80	75		20	144	135

Окончание табл. 3

m	*n*	Уровни значим.		*m*	*n*	Уровни значим.		*m*	*n*	Уровни знач.	
		0,10	*0,05*			*0,10*	*0,05*			*0,10*	*0,05*
11	20	144	135	14	18	196	187	17	25	314	300
	21	148	139		19	202	192	18	18	291	280
	22	152	143		20	207	197		19	299	287
	23	156	147		21	213	202		20	306	294
	24	161	151		22	218	207		21	313	301
	25	165	155		23	224	212		22	321	307
12	12	127	120		24	229	218		23	328	314
	13	131	125		25	235	223		24	335	321
	14	136	129	15	15	200	192		25	343	328
	15	141	133		16	206	197	19	19	325	313
	16	145	138		17	212	203		20	333	320
	17	150	142		18	218	208		21	341	328
	18	155	146		19	224	214		22	349	335
	19	159	150		20	230	220		23	357	342
	20	164	155		21	236	225		24	364	350
	21	169	159		22	242	231		25	372	357
	22	173	163		23	248	236	20	20	361	348
	23	178	168		24	254	242		21	370	356
	24	183	172		25	260	248		22	378	364
	25	187	176	16	16	229	219		23	386	371
13	13	149	142		17	235	225		24	394	379
	14	154	147		18	242	231		25	403	387
	15	159	152		19	248	237	21	21	399	385
	16	165	156		20	255	243		22	408	393
	17	170	161		21	261	249		23	417	401
	18	175	166		22	267	255		24	425	410
	19	180	171		23	274	261		25	434	418
	20	185	175		24	280	267	22	22	439	424
	21	190	180		25	287	273		23	448	432
	22	195	185	17	17	259	249		24	457	441
	23	200	189		18	266	255		25	467	450
	24	205	194		19	273	262	23	23	481	465
	25	211	199		20	280	268		24	491	474
14	14	174	166		21	287	274		25	500	483
	15	179	171		22	294	281	24	24	525	507
	16	185	176		23	300	287		25	535	517
	17	190	182		24	307	294	25	25	570	552

Таблица 4

Критерий исключения резко выделяющихся наблюдений

$$\varsigma(m^*(x), s(x)) = \max_i \frac{|x_{mi} - m^*(x)|}{s(x)}$$

Число членов вариационного ряда *n*	Уровни значимости		Число членов вариационного ряда *n*	Уровни значимости	
	0,10	*0,05*		*0,10*	*0,05*
3	1,412	1,414	28	2,764	2,929
4	1,689	1,710	29	2,778	2,944
5	1,869	1,917	30	2,792	2,958
6	1,996	2,067	31	2,805	2,972
7	2,093	2,182	32	2,818	2,985
8	2,172	2,273	33	2,830	2,998
9	2,238	2,349	34	2,842	3,010
10	2,294	2,414	35	2,853	3,022
11	2,343	2,470	36	2,864	3,033
12	2,387	2,519	37	2,874	3,044
13	2,426	2,563	38	2,885	3,055
14	2,461	2,602	39	2,894	3,065
15	2,494	2,638	40	2,904	3,075
16	2,523	2,670	41	2,913	3,084
17	2,551	2,701	42	2,922	3,094
18	2,577	2,728	43	2,931	3,103
19	2,601	2,754	44	2,940	3,112
20	2,623	2,779	45	2,948	3,120
21	2,644	2,801	46	2,956	3,129
22	2,664	2,823	47	2,964	3,137
23	2,683	2,843	48	2,972	3,145
24	2,701	2,862	49	2,980	3,152
25	2,718	2,880	50	2,987	3,160
26	2,734	2,897	51	2,994	3,167
27	2,749	2,913	52	3,001	3,175

Таблица 5

Критерии исключения резко выделяющихся наблюдений

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1},\ \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2},\ \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}$$

Число членов вариационного ряда *n*	Уровни значимости α		Число членов вариационного ряда *n*	Уровни значимости α	
	0,10	*0,05*		*0,10*	*0,05*
3	0,886	0,941	11	0,332	0,392
	1,000	1,000		0,385	0,450
	1,000	1,000		0,449	0,504

Окончание табл. 5

Число членов вариационного ряда *n*	Уровни значимости α		Число членов вариационного ряда *n*	Уровни значимости α	
	0,10	*0,05*		*0,10*	*0,05*
4	0,679	0,765	12	0,318	0,376
	0,910	0,955		0,367	0,428
	0,935	0,967		0,429	0,481
5	0,557	0,642	15	0,285	0,338
	0,728	0,807		0,323	0,381
	0,782	0,845		0,382	0,430
6	0,482	0,560	20	0,252	0,300
	0,609	0,689		0,282	0,334
	0,670	0,736		0,333	0,372
7	0,434	0,507	24	0,234	0,281
	0,530	0,610		0,260	0,309
	0,596	0,661		0,309	0,347
8	0,399	0,468	30	0,215	0,260
	0,479	0,554		0,236	0,283
	0,545	0,607		0,285	0,322
9	0,370	0,437	–	–	–
	0,441	0,512	–	–	–
	0,505	0,565	–	–	–
10	0,319	0,412	–	–	–
	0,409	0,477	–	–	–
	0,474	0,531	–	–	–

Таблица 6

Критерий Аббе

n	*P* = 0,05	*n*	*P* = 0,05	*n*	*P* = 0,05	*n*	*P* = 0,05
4	0,3902	19	0,6417	34	0,7256	49	0,7698
5	0,4103	20	0,6498	35	0,7292	50	0,7718
6	0,4451	21	0,6574	36	0,7328	51	0,7739
7	0,4680	22	0,6645	37	0,7363	52	0,7759
8	0,4912	23	0,6713	38	0,7396	53	0,7779
9	0,5121	24	0,6776	39	0,7429	54	0,7799
10	0,5311	25	0,6836	40	0,7461	55	0,7817
11	0,5482	26	0,6893	41	0,7491	56	0,7836
12	0,5638	27	0,6946	42	0,7521	57	0,7853
13	0,5778	28	0,6996	43	0,7550	58	0,7872
14	0,5908	29	0,7046	44	0,7576	59	0,7891
15	0,6027	30	0,7091	45	0,7603	∞	0,7906
16	0,6137	31	0,7136	46	0,7628	–	–
17	0,6237	32	0,7177	47	0,7653	–	–
18	0,6330	33	0,7216	48	0,7676	–	–

Таблица 7

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)		
	0,5	*0,10*	*0,05*
1	1,0000	6,3138	12,7062
2	0,8165	2,9200	4,3037
3	0,7649	2,3534	3,1824
4	0,7497	2,1318	2,7764
5	0,7267	2,0150	2,5706
6	0,7176	1,9432	2,4469
7	0,7111	1,8946	2,3646
8	0,7064	1,8595	2,3060
9	0,7027	1,8331	2,2622
10	0,6998	1,8125	2,2281
11	0,6974	1,7959	2,2010
12	0,6955	1,7823	2,1788
13	0,6938	1,7709	2,1604
14	0,6924	1,7613	2,1448
15	0,6912	1,7530	2,1314
16	0,6901	1,7459	2,1190
17	0,6892	1,7396	2,1098
18	0,6884	1,7341	2,1009
19	0,6876	1,7291	2,0930
20	0,6870	1,7247	2,0860
21	0,6864	1,7207	2,0796
22	0,6858	1,7171	2,0739
23	0,6853	1,7139	2,0687
24	0,6848	1,7109	2,0639
25	0,6844	1,7081	2,0595
26	0,6840	1,7056	2,0555
27	0,6837	1,7033	2,0518
28	0,6834	1,7011	2,0484
29	0,6830	1,6991	2,0452
30	0,6828	1,6973	2,0423
40	0,6807	1,6839	2,0211
60	0,6786	1,6706	2,0003
120	0,6765	1,6577	1,9840
∞	0,6750	1,6479	1,9647
–	*0,25*	*0,05*	*0,025*
Уровень значимости α (односторонняя критическая область)			

Таблица 8

Значения функции Лапласа

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$$

X	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*X*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0,0000	0,38	0,1480	0,75	0,2734	1,12	0,3686
0,01	0,0040	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708
0,02	0,0080	0,40	0,1554	0,77	0,2794	1,14	0,3729
0,03	0,0120	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749
0,04	0,0160	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770
0,05	0,0199	0,43	0,1664	0,80	0,2881	1,17	0,3790
0,06	0,0239	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810
0,07	0,0279	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,20	0,3849
0,08	0,0319	0,46	0,1772	0,83	0,2967	1,21	0,3869
0,09	0,0359	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,22	0,3883
0,10	0,0398	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,23	0,3907
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,24	0,3925
0,13	0,0517	0,50	0,1915	0,87	0,3078	1,25	0,3944
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,26	0,3962
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,27	0,3980
0,16	0,0636	0,53	0,2019	0,90	0,3159	1,28	0,3997
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,29	0,4015
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,30	0,4032
0,19	0,0753	0,56	0,2123	0,93	0,3238	1,31	0,4049
0,20	0,0793	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,32	0,4066
0,21	0,0832	0,58	0,2190	0,95	0,3289	1,33	0,4082
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,34	0,4099
0,23	0,0910	0,60	0,2267	0,97	0,3340	1,35	0,4115
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,36	0,4131
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,37	0,4147
0,26	0,1026	0,63	0,2357	1,00	0,3413	1,38	0,4162
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,39	0,4177
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,40	0,4192
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	1,41	0,4207
0,30	0,1179	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,42	0,4222
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,43	0,4230
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,44	0,4251
0,33	0,1293	0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,45	0,4265
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,46	0,4279
0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,47	0,4292
0,36	0,1406	0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,48	0,4306
0,37	0,1443	0,74	0,2703	1,11	0,3665	1,49	0,4319

Окончание табл. 8

X	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
1,50	0,4332	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,81	0,4975
1,51	0,4345	1,91	0,4719	2,31	0,4896	2,82	0,4976
1,52	0,4357	1,92	0,4726	2,32	0,4898	2,83	0,4977
1,53	0,4370	1,93	0,4732	2,33	0,4901	2,84	0,4978
1,54	0,4382	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,85	0,49781
1,55	0,4394	1,95	0,4744	2,35	0,4906	2,86	0,49782
1,56	0,4406	1,96	0,4750	2,36	0,4909	2,87	0,49795
1,57	0,4418	1,97	0,4756	2,37	0,4911	2,88	0,49801
1,58	0,4429	1,98	0,4761	2,38	0,4913	2,89	0,49807
1,59	0,4441	1,99	0,4767	2,39	0,4915	2,90	0,49813
1,60	0,4452	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,91	0,49819
1,61	0,4463	2,01	0,4773	2,41	0,4920	2,92	0,49820
1,62	0,4474	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,93	0,49830
1,63	0,4484	2,03	0,4788	2,43	0,4924	2,94	0,49840
1,64	0,4495	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,95	0,49841
1,65	0,4505	2,05	0,4798	2,45	0,4929	2,96	0,49846
1,66	0,4515	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,97	0,49851
1,67	0,4525	2,07	0,4808	2,47	0,4932	2,98	0,49860
1,68	0,4535	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,99	0,49861
1,69	0,4545	2,09	0,4817	2,49	0,4936	3,00	0,49865
1,70	0,4554	2,10	0,4821	2,50	0,4938	3,10	0,49903
1,71	0,4564	2,11	0,4826	2,51	0,4939	3,20	0,49931
1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,52	0,4941	3,30	0,49951
1,73	0,4582	2,13	0,4834	2,53	0,4942	3,40	0,49966
1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,54	0,4945	3,50	0,49976
1,75	0,4599	2,15	0,4843	2,55	0,4946	3,60	0,499841
1,76	0,4608	2,16	0,4846	2,60	0,4953	3,80	0,499928
1,77	0,4616	2,17	0,4850	2,67	0,4962	4,00	0,499968
1,78	0,4625	2,18	0,4854	2,68	0,4963	4,10	0,499979
1,79	0,4633	2,19	0,4858	2,69	0,4964	4,20	0,499987
1,80	0,4641	2,20	0,4861	2,70	0,4965	4,30	0,499991
1,81	0,4649	2,21	0,4864	2,71	0,4966	4,40	0,499995
1,82	0,4656	2,22	0,4868	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,83	0,4664	2,23	0,4872	2,73	0,4968	4,60	0,499997
1,84	0,4671	2,24	0,4875	2,74	0,4969	4,70	0,499997
1,85	0,4678	2,25	0,4878	2,75	0,4970	4,80	0,499997
1,86	0,4686	2,26	0,4881	2,76	0,4971	4,90	0,499997
1,87	0,4693	2,27	0,4884	2,77	0,4972	5,00	0,499997
1,88	0,4699	2,28	0,4887	2,78	0,4973	–	–
1,89	0,4706	2,29	0,4890	2,80	0,4974	–	–

Таблица 9

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α			
	0,20	*0,10*	*0,05*	*0,025*
1	1,642	2,706	3,841	5,024
2	3,219	4,605	5,991	7,378
3	4,642	6,251	7,815	9,348
4	5,989	7,779	9,488	11,143
5	7,289	9,236	11,070	12,832
6	8,558	10,645	12,592	14,449
7	9,803	12,017	14,067	16,013
8	11,030	13,362	15,507	17,535
9	12,242	14,684	16,919	19,023
10	13,442	15,987	18,307	20,483
11	14,631	17,275	19,676	21,920
12	15,812	18,549	21,026	23,336
13	16,985	19,812	22,362	24,736
14	18,151	21,064	23,685	26,129
15	19,311	22,307	24,996	27,488
16	20,465	23,542	26,296	28,845
17	21,615	24,769	27,587	30,191
18	22,766	25,989	28,869	31,536
19	23,900	27,204	30,144	32,852
20	25,038	28,412	31,410	34,170
21	26,171	29,615	32,671	35,479
22	27,301	30,813	33,924	36,781
23	28,429	32,007	35,172	38,076
24	29,553	33,196	36,415	39,364
25	30,675	34,382	37,652	40,646
26	31,795	35,563	38,885	41,923
27	32,912	36,741	40,113	43,194
28	34,027	37,916	41,337	44,461
29	35,139	39,087	42,557	45,722
30	36,250	40,256	43,773	46,979
31	37,350	41,422	44,985	48,232
32	38,466	42,585	46,194	49,480
33	39,572	43,745	47,400	50,725
34	40,676	44,903	48,602	51,966
35	41,778	46,059	49,802	53,203
36	42,879	47,212	50,998	54,437

Таблица 10

Критические точки распределения Фишера. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ (k_1 – число степеней свободы большей дисперсии, k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

k_2	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$k_1 = 4$	$k_1 = 5$	$k_1 = 6$	$k_1 = 7$	$k_1 = 8$	$k_1 = 9$
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	18,385
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8868	8,8452	8,8123
4	7,7086	6,9443	6,3914	6,3883	6,2560	6,1631	6,0942	6,0410	5,9988
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2066	4,1468	4,0990
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660	3,7870	3,7257	3,6767
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8378	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881
9	5,1174	4,2565	3,8626	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,4780	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,9480	2,8962
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144
14	4,6001	3,7289	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876
16	4,4940	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377
17	4,4513	3,5913	3,1968	2,9647	2,8100	2,6987	2,6143	2,5480	2,4943
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563
19	4,3808	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227
20	4,3513	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5990	2,5140	2,4471	2,3928
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,3661
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419
23	4,2793	3,4221	3,0280	2,7955	2,6400	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821
26	4,2252	3,3690	2,9751	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655
27	4,2100	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501
28	4,1960	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,2360
29	4,1830	3,3277	2,9340	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2782	2,2239
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107
40	4,0848	3,2317	2,8387	2,6060	2,4459	2,3359	2,2490	2,1802	2,1240
60	4,0012	3,1904	2,7581	2,5252	2,3683	2,2540	2,1665	2,0970	2,0401
120	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2900	2,1750	2,0868	2,0164	1,9588
∞	3,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799

Продолжение табл. 10

k_2	$k_1 = 10$	$k_1 = 12$	$k_1 = 15$	$k_1 = 20$	$k_1 = 30$	$k_1 = 40$	$k_1 = 60$	$k_1 = 120$	$k_1 = \infty$
1	241,88	243,91	245,95	248,01	250,09	251,14	252,20	253,25	254,32
2	19,396	19,413	19,429	19,446	19,462	19,471	19,479	19,487	19,496
3	8,7855	8,7446	8,7029	8,6602	8,6166	8,5944	8,5720	8,5484	8,5265
4	5,9644	5,9117	5,8578	5,8025	5,7459	5,7170	5,6878	5,6581	5,6281
5	4,7351	4,6777	4,6188	4,5581	4,4957	4,4638	4,4314	4,3984	4,3650
6	4,0600	3,9999	3,9381	3,8742	3,8082	3,7743	3,7398	3,7047	3,6688
7	3,6365	3,5747	3,5108	3,4445	3,3758	3,3404	3,3043	3,2674	3,2298
8	3,3472	3,2540	3,2184	3,1503	3,0794	3,0428	3,0053	2,9669	2,9276
9	3,1373	3,0729	3,0061	2,9365	2,8637	2,8259	2,7872	2,7445	2,7067
10	2,9783	2,9130	2,8450	2,7740	2,6996	2,6609	2,6211	2,5801	2,5379
11	2,8536	2,7876	2,7186	2,6464	2,5705	2,5309	2,4901	2,4480	2,4045
12	2,7534	2,6866	2,6169	2,5436	2,4663	2,4259	2,3842	2,3410	2,2962
13	2,6710	2,6037	2,5331	2,4589	2,3803	2,3392	2,2966	2,2524	2,2064
14	2,6021	2,5342	2,4630	2,3879	2,3082	2,2664	2,2230	2,1778	2,1307
15	2,5437	2,4753	2,4035	2,3275	2,2468	2,2043	2,1601	2,1141	2,0658
16	2,4935	2,4247	2,3522	2,2756	2,1938	2,1507	2,1058	2,0589	2,0096
17	2,4499	2,3807	2,3077	2,2304	2,1477	2,1040	2,0584	2,0107	1,9604
18	2,4117	2,3421	2,2686	2,1906	2,1071	2,0629	2,0166	1,9681	1,9168
19	2,3779	2,3080	2,2341	2,1555	2,0712	2,0264	1,9796	1,9302	1,8780
20	2,3479	2,2776	2,2033	2,1342	2,0391	1,9938	1,9464	1,8963	1,8432
21	2,3210	2,2504	2,1757	2,0960	2,0102	1,9645	1,9163	1,8657	1,8117
22	2,2967	2,2258	2,1508	2,0707	1,9842	1,9380	1,8895	1,8380	1,7831
23	2,2747	2,2036	2,1282	2,0476	1,9605	1,9139	1,8649	1,8128	1,7570
24	2,2547	2,1834	2,1077	2,0267	1,9390	1,8920	1,8424	1,7897	1,7331
25	2,2365	2,1649	2,0889	2,0075	1,9193	1,8718	1,8217	1,7684	1,7110
26	2,2197	2,1479	2,0716	1,9898	1,9010	1,8533	1,8027	1,7488	1,6906
27	2,2043	2,1323	2,0558	1,9736	1,8842	1,8361	1,7851	1,7307	1,6717
28	2,1900	2,1179	2,0411	1,9586	1,8687	1,8263	1,7689	1,7118	1,6541
29	2,1768	2,1045	2,0275	1,9446	1,8543	1,8055	1,7537	1,6981	1,6377
30	2,1646	2,0921	2,0148	1,9317	1,8409	1,7918	1,7396	1,6815	1,6223
40	2,0772	2,0035	1,9245	1,8389	1,7444	1,6928	1,6373	1,5766	1,5089
60	1,9926	1,9174	1,8364	1,7486	1,6491	1,5943	1,5343	1,4673	1,3893
120	1,9105	1,8337	1,7505	1,6587	1,5543	1,4952	1,4290	1,3519	1,2539
∞	1,8307	1,7522	1,6664	1,5705	1,4591	1,3940	1,3180	1,2214	1,0000

Продолжение табл. 10

Критические точки распределения Фишера. Уровень значимости $\alpha = 0{,}10$ (k_1 – число степеней свободы большей дисперсии, k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

k_2	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$k_1 = 4$	$k_1 = 5$	$k_1 = 6$	$k_1 = 7$	$k_1 = 8$	$k_1 = 9$
1	39,864	49,500	53,593	55,833	57,241	58,204	58,906	59,439	59,858
2	8,5263	9,0000	9,1618	9,2434	9,2926	9,3255	9,3491	9,3668	9,3805
3	5,5383	5,4624	5,3908	5,3427	5,3092	5,2847	5,2662	5,2517	5,2400
4	4,5448	4,3246	4,1908	4,1073	4,0506	4,0098	3,9790	3,9549	3,9357
5	4,0604	3,7797	3,6195	3,5202	3,4530	3,4045	3,3679	3,3393	3,3163
6	3,7760	3,4633	3,2888	3,1808	3,1075	3,0546	3,0145	2,9830	2,9577
7	3,5894	3,2574	3,0741	2,9605	2,8833	2,8274	2,7849	2,7516	2,7247
8	3,4579	3,1131	2,9238	2,8064	2,7265	2,6683	2,6241	2,5893	2,5612
9	3,3603	3,0065	2,8129	2,6927	2,6106	2,5509	2,5053	2,4694	2,4403
10	3,2850	2,9245	2,7277	2,6053	2,5216	2,4606	2,4140	2,3772	2,3473
11	3,2252	2,8595	2,6602	2,5362	2,4512	2,3891	2,3416	2,3040	2,2735
12	3,1765	2,8068	2,6055	2,4801	2,3940	2,3310	2,2828	2,2446	2,2135
13	3,1362	2,7632	2,5603	2,4337	2,3467	2,2830	2,2341	2,1953	2,1638
14	3,1022	2,7265	2,5222	2,3947	2,3069	2,2426	2,1931	2,1539	2,1220
15	3,0732	2,6952	2,4898	2,3614	2,2730	2,2081	2,1582	2,1185	2,0862
16	3,0481	2,6682	2,4618	2,3327	2,2438	2,1783	2,1280	2,0880	2,0553
17	3,0262	2,6446	2,4374	2,3077	2,2181	2,1524	2,1017	2,0613	2,0284
18	3,0070	2,6239	2,4160	2,2858	2,1958	2,1296	2,0785	2,0379	2,0047
19	2,9899	2,6056	2,3970	2,2663	2,1760	2,1094	2,0580	2,0171	1,9836
20	2,9747	2,5893	2,3801	2,2489	2,1582	2,0913	2,0397	1,9985	1,9649
21	2,9609	2,5746	2,3649	2,2333	2,1423	2,0751	2,0232	1,9819	1,9480
22	2,9486	2,5613	2,3512	2,2193	2,1279	2,0605	2,0084	1,9668	1,9327
23	2,9374	2,5493	2,3387	2,2065	2,1149	2,0472	1,9949	1,9531	1,9189
24	2,9271	2,5383	2,3274	2,1949	2,1030	2,0351	1,9826	1,9407	1,9063
25	2,9177	2,5283	2,3170	2,1843	2,0922	2,0241	1,9714	1,9292	1,8947
26	2,9091	2,5191	2,3075	2,1745	2,0822	2,0139	1,9610	1,9188	1,8841
27	2,9012	2,5106	2,2987	2,1655	2,0730	2,0045	1,9515	1,9091	1,8743
28	2,8939	2,5028	2,2906	2,1571	2,0645	1,9959	1,9427	1,9001	1,8652
29	2,8871	2,4955	2,2831	2,1494	2,0566	1,9878	1,9345	1,8918	1,8568
30	2,8807	2,4887	2,2761	2,1423	2,0492	1,9803	1,9269	1,8841	1,8490
40	2,8354	2,4404	2,2261	2,0909	1,9968	1,9269	1,8725	1,8289	1,7929
60	2,7914	2,3933	2,1774	2,0410	1,9457	1,8747	1,8194	1,7748	1,7380
120	2,7478	2,3473	2,1300	1,9923	1,8959	1,8238	1,7675	1,7220	1,6843
∞	2,7055	2,3026	2,0838	1,9449	1,8473	1,7741	1,7167	1,6702	1,6315

Окончание табл. 10

k_2	$k_1 = 10$	$k_1 = 12$	$k_1 = 15$	$k_1 = 20$	$k_1 = 30$	$k_1 = 40$	$k_1 = 60$	$k_1 = 120$	$k_1 = \infty$
1	60,195	60,705	61,220	61,740	62,265	63,529	62,794	63,061	63,328
2	9,3916	9,4081	9,4247	9,4413	9,4579	9,4663	9,4746	9,4829	9,4913
3	5,2304	5,2156	5,2003	5,1845	5,1681	5,1597	5,1512	5,1425	5,1337
4	3,9199	3,8955	3,8703	3,8413	3,8174	3,8036	3,7896	3,7753	3,7007
5	3,2974	3,2682	3,2380	3,2067	3,1741	3,1573	3,1402	3,1228	3,1050
6	2,9369	2,9047	2,8712	2,8363	2,8000	2,7812	2,7620	2,7423	2,7222
7	2,7025	2,6681	2,6322	2,5947	2,5555	2,5351	2,5142	2,4928	2,4708
8	2,5380	2,5020	2,4642	2,4246	2,3830	2,3614	2,3391	2,3162	2,2926
9	2,4163	2,3789	2,3396	2,2983	2,2547	2,2320	2,2085	2,1843	2,1592
10	2,3226	2,2841	2,2435	2,2007	2,1554	2,1317	2,1072	2,0819	2,0554
11	2,2482	2,2087	2,1671	2,1230	2,0762	2,0516	2,0261	1,9997	1,9721
12	2,1878	2,1474	2,1049	2,0597	2,0115	1,9861	1,9597	1,9323	1,9036
13	2,1376	2,0966	2,0532	2,0070	1,9576	1,9315	1,9043	1,8759	1,8462
14	2,0954	2,0537	2,0095	1,9525	1,9119	1,8852	1,8572	1,8280	1,7973
15	2,0593	2,0171	1,9722	1,9243	1,8728	1,8454	1,8168	1,7867	1,7551
16	2,0281	1,9854	1,9399	1,8913	1,8388	1,8108	1,7816	1,7507	1,7182
17	2,0009	1,9577	1,9117	1,8624	1,8090	1,7805	1,7506	1,7141	1,6856
18	1,9770	1,9333	1,8888	1,8368	1,7827	1,7537	1,7232	1,6910	1,6567
19	1,9557	1,9117	1,8647	1,8142	1,7592	1,7298	1,6988	1,6659	1,6308
20	1,9367	1,8924	1,8449	1,7938	1,7382	1,7083	1,6768	1,6433	1,6074
21	1,9197	1,8750	1,8272	1,7756	1,7193	1,6890	1,6569	1,6228	1,5862
22	1,9043	1,8593	1,8111	1,7590	1,7021	1,6714	1,6389	1,6042	1,5668
23	1,8903	1,8450	1,7964	1,7439	1,6864	1,6554	1,6224	1,5871	1,5490
24	1,8775	1,8319	1,7831	1,7302	1,6721	1,6407	1,6073	1,5715	1,5327
25	1,8658	1,8300	1,7708	1,7175	1,6589	1,6272	1,5934	1,5570	1,5176
26	1,8550	1,8090	1,7598	1,7059	1,6468	1,6147	1,5805	1,5437	1,5036
27	1,8432	1,7989	1,7492	1,6951	1,6356	1,6032	1,5686	1,5313	1,4906
28	1,8359	1,7895	1,7395	1,6832	1,6252	1,5925	1,5575	1,5198	1,4784
29	1,8274	1,7808	1,7306	1,0759	1,6155	1,5825	1,5472	1,5090	1,4670
30	1,8195	1,7727	1,7223	1,6673	1,6065	1,5732	1,5376	1,4989	1,4564
40	1,7627	1,7146	1,6624	1,6052	1,5411	1,5056	1,4672	1,4248	1,3769
60	1,7070	1,6574	1,6034	1,5435	1,4755	1,4373	1,3952	1,3476	1,2915
120	1,6524	1,6012	1,5450	1,4821	1,4094	1,3676	1,3203	1,2646	1,1926
∞	1,5987	1,5458	1,4871	1,4206	1,3419	1,2951	1,2400	1,1686	1,0000

Критерий Кокрена. Верхние пятипроцентные (α = 0,05) Таблица 11

критические значения для статистики $G = \dfrac{s_{max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_k^2}$,

построенной по k независимым оценкам дисперсий, каждая из которых обладает f степенями свободы

k	f = 1	f = 2	f = 3	f = 4	f = 5	f = 6	f = 7
2	0,9985	0,9750	0,9792	0,9057	0,8772	0,8534	0, 8332
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0, 6530
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0, 5365
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0, 4564
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4809	0,4447	0,4184	0, 3980
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0, 3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0, 3185
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0, 2910
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0, 2666
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0, 2299
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0, 1911
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0, 1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0, 1286
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0, 1051
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0, 0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0, 0583
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0, 0312
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
k	f = 8	f = 9	f = 10	f = 16	f = 36	f = 144	f = ∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1635	0,1308	0,1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,8300
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблица 12

Критерий Бартлетта. Процентные точки М-статистики, α = 0,05

k	C_1=0,0	C_1=0,5	C_1=1,0	C_1=1,5	C_1=2,0	C_1=2,5	C_1=3,0	C_1=3,5	C_1=4,0
3(a)	5,99	6,47	6,89	7,80	7,38	7,39	7,22	–	–
(b)	5,99	6,22	6,43	6,64	6,84	7,03	7,22	–	–
4(a)	7,81	8,24	8,63	8,96	9,21	9,38	9,43	9,37	9,18
(b)	7,81	8,00	8,17	8,35	8,52	8,69	8,85	9,02	9,18
5(a)	9,49	9,88	10,24	10,57	10,86	11,08	11,24	11,32	11,31
(b)	9,49	9,65	9,80	9,96	10,11	10,27	10,42	10,57	10,72
6(a)	11,07	11,43	11,78	12,11	12,40	12,65	12,86	13,01	13,11
(b)	11,07	11,22	11,36	11,51	11,65	11,79	11,94	12,08	12,22
7(a)	12,59	12,94	13,27	13,59	13,88	14,15	14,38	14,58	14,73
(b)	12,59	12,73	12,87	13,00	13,14	13,27	13,41	13,55	13,68
8(a)	14,07	14,40	14,72	15,03	15,32	15,60	15,84	16,06	16,25
(b)	14,07	14,20	14,33	14,46	14,59	14,72	14,85	14,98	15,11
9(a)	15,51	15,83	16,14	16,44	16,73	17,01	17,26	17,49	17,70
(b)	15,51	15,63	15,76	15,89	16,02	16,14	16,27	16,40	16,52
10(a)	16,92	17,23	17,54	17,83	18,12	18,39	18,65	18,89	19,11
(b)	16,92	17,04	17,17	17,29	17,41	17,54	17,66	17,79	17,91
11(a)	18,31	18,61	18,91	19,20	19,48	19,76	20,02	20,26	20,49
(b)	18,31	18,43	18,55	18,67	18,79	18,91	19,04	19,16	19,28
12(a)	19,68	19,97	20,26	20,55	20,83	21,10	21,36	21,61	21,84
(b)	19,68	19,79	19,91	20,03	20,15	20,27	20,39	20,51	20,63
13(a)	21,03	21,32	21,60	21,89	22,16	22,43	22,69	22,94	23,18
(b)	21,03	21,14	21,26	21,38	21,50	21,62	21,74	21,85	21,97
14(a)	22,36	22,65	22,93	23,21	23,48	23,75	24,01	24,26	24,50
(b)	22,36	22,48	22,60	22,71	22,83	22,95	23,06	23,18	23,30
15(a)	23,68	23,97	24,24	24,52	24,79	25,05	25,31	25,56	25,80
(b)	23,68	23,80	23,92	24,03	24,15	24,26	24,38	24,50	24,61

Окончание табл. 12

k	C_1=4,5	C_1=5,0	C_1=6,0	C_1=7,0	C_1=8,0	C_1=9,0	C_1=10,0	C_1=12,0	C_1=14,0
3(a)	–	–	–	–	–	–	–	–	–
(b)	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4(a)	–	–	–	–	–	–	–	–	–
(b)	–	–	–	–	–	–	–	–	–
5(a)	11,21	11,02	–	–	–	–	–	–	–
(b)	10,87	11,02	–	–	–	–	–	–	–
6(a)	13,14	13,10	12,78	–	–	–	–	–	–
(b)	12,36	12,50	12,78	–	–	–	–	–	–
7(a)	14,83	14,88	14,81	14,49	–	–	–	–	–
(b)	13,82	13,95	14,32	14,49	–	–	–	–	–
8(a)	16,40	16,51	16,60	16,49	16,16	–	–	–	–
(b)	15,25	15,38	15,64	15,90	16,16	–	–	–	–
9(a)	17,88	18,03	18,22	18,26	18,12	17,79	–	–	–
(b)	16,65	16,78	17,03	17,29	17,54	17,79	–	–	–
10(a)	19,31	19,48	19,75	19,89	19,89	19,73	19,40	–	–
(b)	18,04	18,16	18,41	18,66	18,91	19,16	19,40	–	–
11(a)	20,70	20,89	21,21	21,42	21,52	21,49	21,32	–	–
(b)	19,40	19,52	19,77	20,01	20,26	20,50	20,75	–	–
12(a)	22,06	22,27	22,62	22,88	23,06	23,12	23,07	22,56	–
(b)	20,75	20,87	21,12	21,36	21,60	21,64	22,08	22,56	–
13(a)	23,40	23,62	23,99	24,30	24,53	24,66	24,70	24,44	–
(b)	22,09	22,21	23,45	22,69	22,92	23,16	23,40	23,88	–
14(a)	24,73	24,95	25,34	25,68	23,93	26,14	26,25	26,17	25,66
(b)	23,42	23,53	23,77	24,00	24,24	24,48	24,74	25,19	25,65
15(a)	26,04	26,26	26,67	27,03	27,33	27,56	27,73	27,80	27,50
(b)	24,73	24,85	25,08	25,31	25,55	23,78	26,01	26,48	26,95

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Алифанов Аскольд Леонидович

Алифанов Леонид Аскольдович

МАРКЕТИНГ:

РЕШЕНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Редактор Л. И. Вейсова

Гигиенический сертификат № 24.49.04.953.П.000338.05.01 от 25.05.2001 г.
Подп. в печать 05.04.2005. Формат 60х84/16. Бумага тип. № 1. Офсетная печать.
Усл. печ. л. 5,5. Уч.-изд. л. 4,75. Тираж 200 экз. Заказ С 59
Отпечатано в ИПЦ КГТУ
660074, Красноярск, ул. Киренского, 28